

**MÉTHODES MATHÉMATIQUES
DE LA PHYSIQUE**

Dr. Sylvain Bréchet

EPFL

Table des matières

	Préface	<i>page</i> 1
1	Fonctions de Green	3
	1.1 Introduction	3
	1.2 Distribution de Dirac	4
	1.3 Fonctions de Green	6
	1.4 Oscillateur harmonique forcé	7
	1.5 Oscillateur harmonique forcé périodiquement	9
2	Analyse complexe	13
	2.1 Introduction	13
	2.2 Equations de Cauchy-Riemann et de Laplace	13
	2.3 Théorème et formule de Cauchy	14
	2.4 Série de Laurent	15
	2.5 Théorème des résidus	16
	2.6 Potentiel électrostatique dans un cylindre	17
	2.7 Loi d'Ampère	22
	2.8 Identité remarquable	23
3	Fonction gamma	25
	3.1 Introduction	25
	3.2 Propriétés	26
	3.3 Pôles et résidus	27
	3.4 Développement en produit	28
	3.5 Formule de Stirling	29
	3.6 Entropie de mélange	32
	3.7 Thermodynamique statistique	34
4	Calcul variationnel	37
	4.1 Introduction	37
	4.2 Equation d'Euler-Lagrange	37
	4.3 Constante du mouvement de Beltrami	39
	4.4 Equations de champs d'Euler-Lagrange	39
	4.5 Brachistochrone	41
	4.6 Equations de Maxwell	46
5	Probabilités et statistiques	49
	5.1 Introduction	49
	5.2 Probabilités	49
	5.3 Analyse combinatoire	51
	5.4 Statistiques	51
	5.5 Marche aléatoire en une dimension	54
	5.6 Equation de diffusion de probabilités	58
	5.7 Marche aléatoire en deux et trois dimensions	58
6	Séries de Fourier	61
	6.1 Introduction	61
	6.2 Séries de Fourier réelles	61

6.3	Relations d'orthogonalité de Fourier réelles	63
6.4	Coefficients de Fourier réels	64
6.5	Séries de Fourier complexes	65
6.6	Parité des séries de Fourier	66
6.7	Fonctions périodiques	67
6.8	Corde vibrante	67
6.9	Corde pincée	69
7	Transformations de Fourier	73
7.1	Introduction	73
7.2	Transformations intégrales	73
7.3	Transformations de Fourier à une dimension	75
7.4	Transformations de Fourier à trois dimensions	76
7.5	Transformations de Fourier de dérivées	77
7.6	Oscillateur harmonique forcé	78
7.7	Oscillateur harmonique forcé périodiquement	82
8	Equations différentielles ordinaires	85
8.1	Introduction	85
8.2	Equations différentielles ordinaires du second ordre	85
8.3	Méthode de Frobenius	87
8.4	Méthode du wronskien	89
8.5	Méthode de Green	90
8.6	Polynômes de Laguerre	92
8.7	Oscillateur harmonique forcé	94
9	Théorie de Sturm-Liouville	97
9.1	Introduction	97
9.2	Théorie de Sturm-Liouville	98
9.3	Solutions polynomiales	100
9.4	Formule de Rodrigues	101
9.5	Fonction génératrice et intégrale de Schaeffi	103
9.6	Fonctions propres et espace de Hilbert	103
9.7	Décomposition spectrale	105
9.8	Fonction de Green	105
9.9	Ondes stationnaires sur une corde vibrante	107
10	Fonctions de Bessel	113
10.1	Introduction	113
10.2	Equation de Helmholtz cartésienne	114
10.3	Laplacien en coordonnées polaires	115
10.4	Equation de Helmholtz polaire	116
10.5	Equation de Bessel	117
10.6	Fonctions de Bessel	117
10.7	Solutions de l'équation de Helmholtz polaire	118
10.8	Particule libre confinée sur un disque	119
10.9	Membrane circulaire vibrante	120
11	Moment cinétique quantique	123
11.1	Introduction	123
11.2	Laplacien en coordonnées sphériques	123
11.3	Opérateur moment cinétique	125
11.4	Atome d'hydrogène	126
11.5	Opérateurs d'échelle	127
11.6	Nombres quantiques associés à la rotation	129
11.7	Equation de Legendre généralisée	131
11.8	Harmoniques sphériques	132
11.9	Equation différentielle radiale	133
11.10	Equation de Laguerre généralisée	135

11.11	Ensemble complet d'observables compatibles	137
12	Algèbre géométrique	141
12.1	Introduction	141
12.2	Structure algébrique	142
12.3	Produits géométriques d'entités algébriques	143
12.4	Modules et inverses	145
12.5	Dualité	146
12.6	Produit extérieur et produit vectoriel	147
12.7	Réflexions	149
12.8	Rotations	151
12.9	Repère en rotation	155
13	Analyse géométrique	159
13.1	Introduction	159
13.2	Opérateurs différentiels	160
13.3	Identités différentielles duales	160
13.4	Théorème du gradient	161
13.5	Théorèmes du rotationnel	162
13.6	Théorèmes de la divergence	163
13.7	Théorème fondamental de l'intégration	164
13.8	Théorème de Cauchy	164
13.9	Equation de Maxwell	165
13.10	Equation d'onde électromagnétique	167

Préface

La physique est formulée dans le langage des mathématiques qui coïncide avec celui de la raison. Comme le dit le célèbre physicien Wigner : “Il est important de souligner que la formulation mathématique des expériences souvent rudimentaire des physiciens, conduit dans un nombre élevé de cas à une description incroyablement précise”. Einstein ajoute à ce propos : “Ce que le monde a d’incompréhensible c’est qu’il soit compréhensible”. Les mathématiques sont donc le langage incontournable dédié à la réflexion sur les subtilités de la nature. Comme pour toute autre langue, il est difficile de dissocier le contenu, la notation et la syntaxe. Essayez donc d’exprimer les lois de Newton sans utiliser la moindre notation mathématique ... Certains étudiants pensent être de meilleurs physiciens en ne sacrifiant ni leur temps ni leur énergie aux mathématiques, mais c’est malheureusement une grossière erreur ... La physique ne peut être réellement appréhendée qu’en maîtrisant les arcanes des mathématiques qui ne servent pas uniquement à analyser des problèmes. Plus important encore, afin de vraiment saisir les concepts de la physique, il est nécessaire d’avoir une certaine souplesse dans le maniement de l’outil mathématique.

La pratique de la physique s’apparente en fait à l’exercice d’équilibriste d’un funambule qui traverse le précipice de l’ignorance sur un fil en plaçant soigneusement un pied devant l’autre. Le premier pied correspond à l’intuition physique et le second à la rigueur mathématique. Traverser un précipice sur un fil est un exercice périlleux qui requiert beaucoup de pratique et d’adresse : tenter de le faire sur un seul pied serait tout simplement suicidaire ! En effet, vouloir résoudre des problèmes de physique en se fiant uniquement à son intuition risque d’une part de provoquer un glissement face à des résultats contre-intuitifs au risque de perdre le fil. D’autre part, résoudre un problème physique à l’aveugle uniquement à l’aide de méthodes mathématiques empêche de voir le fil, ce qui est tout aussi dangereux et pourrait, le cas échéant, s’avérer fatal ... L’intuition physique et la rigueur mathématique sont donc essentielles et indissociables, comme les deux faces d’une pièce de monnaie.

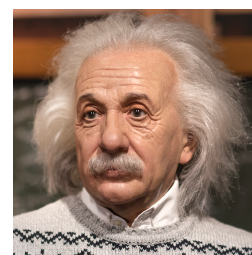
Dans ce cours, on va examiner un certain nombre de méthodes mathématiques sans perdre de vue l’intuition physique qui sera toujours présente en arrière plan. La physique sert donc de points départ et d’arrivée à l’application des méthodes mathématiques. Donner un cours de méthodes mathématiques à des physiciens est une tâche délicate, et suivre un tel cours en deuxième année peut l’être encore davantage. Les physiciens ont besoin des mathématiques pour pouvoir s’exprimer et réfléchir. Les notions mathématiques de base abordées dans ce cours ne sont pas l’apanage des physiciens théoriciens. Elles sont un prérequis pour quiconque souhaite comprendre la physique à l’aide d’ouvrages ou d’articles scientifiques.

Les cours de méthodes mathématiques peuvent souvent se transformer en une collection de sujets variés, apparemment sans lien entre eux, hormis leur utilité pour résoudre certains problèmes physiques. Afin d’éviter de tomber dans ce piège, on va essayer, lorsque c’est possible, de lier les concepts présentés dans les différents chapitres avec le fil conducteur de ce cours que sont les équations différentielles. Chaque chapitre correspond à un cours et il contient une première partie qui établit la théorie sur laquelle se base la méthode mathématique présentée dans le chapitre et une seconde partie qui traite d’une ou plusieurs applications physiques de ces méthodes. Le but est d’offrir aux étudiants une structure intellectuelle, plutôt qu’un simple ensemble de recettes ou de techniques.

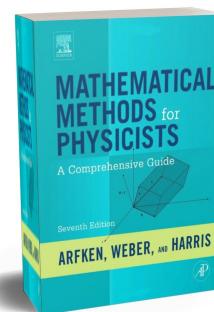
Etudier les mathématiques uniquement en regardant les autres faire est aussi inutile que d’apprendre à jouer d’un instrument de musique en se contentant de l’écouter. L’expérience



Eugene Wigner



Albert Einstein



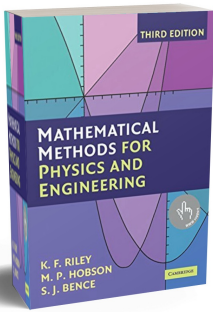
Arfken, Weber, Harris

enrichissante que constitue l'assimilation des concepts mathématiques, passe autant à travers la réflexion sur des notes de cours qu'à travers la pratique de résolution d'exercices. Comme le dit l'adage : "c'est en forgeant qu'on devient forgeron". Il est donc essentiel de joindre l'acte à la parole et de mettre l'ouvrage sur le métier. Pour ce faire, il suffit d'activer le plus merveilleux des instruments : notre cerveau. Et parfois, un crayon, du papier ou une tablette peuvent aussi s'avérer utiles voire indispensables . . .

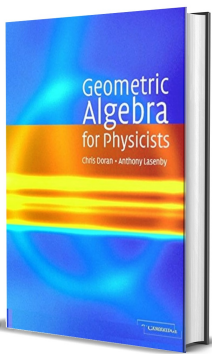
Les équations différentielles et les fonctions spéciales qui leur sont associées, éléments fondamentaux de la physique mathématique, forment la partie centrale de cours. Afin de les étudier de manière systématique, le chap. 1 introduit la méthode Green pour la résolution des équations différentielles inhomogènes à l'aide des distributions de Dirac et des fonctions de Heaviside. En intégrant ces équations différentielles, on se trouve souvent confrontés à des intégrales qui peuvent se résoudre plus facilement dans le cadre de l'analyse complexe présentée au chap. 2. Les intégrales de gaussiennes font intervenir la fonction gamma qui est examinée au chap. 3. Au chap. 4, on montre que les équations différentielles décrivant l'évolution du système physique peuvent être déduites par calcul variationnel en minimisant l'action du système. L'évolution d'un système physique constitué d'un grand nombre de constituants élémentaires nécessite une approche statistique, exposée au chap. 5, qui donne lieu à une description en termes d'équations différentielles dans la limite du continu. Lorsque les solutions d'équations différentielles sont des fonctions continues par morceaux, elles peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires de fonctions sinusoidales à l'aide de séries de Fourier présentées au chap. 6. La résolution d'équations différentielles est souvent nettement plus aisée dans l'espace réciproque de Fourier à l'aide de transformées de Fourier établies au chap. 7. Au chap. 8, on présente les différentes méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires, notamment la méthode de Frobenius et celle de Green. Les équations différentielles ordinaires linéaires du deuxième ordre à coefficients non constants peuvent être exprimées en termes d'équations aux valeurs propres pour des opérateurs différentiels linéaires hermitiens dans le cadre de la théorie de Sturm-Liouville établie au chap. 9. La méthode de séparation des variables pour des équations différentielles aux dérivées partielles est présentée au chap. 10 afin d'étudier les fonctions de Bessel qui sont solutions de systèmes physiques avec une symétrie circulaire. Au chap. 11, on montre comment ces différentes méthodes permettent de résoudre les équations différentielles de l'un des problèmes les plus importants en physique quantique : l'atome d'hydrogène. L'analyse vectorielle et l'analyse complexe ont été introduites notamment afin de simplifier la résolution d'équations différentielles. Dans cette optique, on introduit le cadre conceptuel mathématique unificateur qu'est l'algèbre géométrique au chap. 12. L'analyse géométrique basée sur l'algèbre géométrique permet d'unifier l'analyse vectorielle avec l'analyse complexe comme montré au chap. 13. Les théorèmes d'analyse vectorielle et le théorème de Cauchy de l'analyse complexe ne forment alors plus qu'un seul théorème fondamental de l'analyse géométrique. Les quatre équations de Maxwell n'en forment plus qu'une seule dans ce formalisme, ce qui est tout de même prodigieux ! Voulez-vous savoir comment ? Eh bien, il faudra suivre ce cours . . .

Le livre d'Arfken, Weber et Harris : "Mathematical methods for physicists" sert d'ouvrage de référence principal à ce cours. Comme ouvrage secondaire, je vous recommande aussi la lecture du livre de Riley, Hobson et Bence : "Mathematical Methods for Physics and Engineering". Pour vous familiariser avec l'algèbre et à l'analyse géométriques, je vous conseille de consulter le livre de Doran et Lasenby : "Geometric algebra for physicists" et les livres de MacDonald : "Linear et Geometric Algebra" et "Vector and Geometric Calculus".

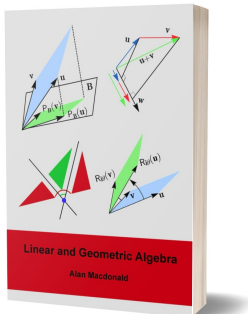
Une partie importante des chapitres de ce cours ainsi que certains exercices sont basés sur le cours de mon collègue, le Prof. Joao Penedones, qui a enseigné cette matière auparavant. Je tiens ici à le remercier pour son soutien dans l'enseignement de ce cours. J'aimerais également remercier mes directeurs de thèse, Anthony Lasenby et Mike Hobson, qui m'ont initié à l'algèbre géométrique à travers la cosmologie théorique. Finalement, mes remerciements vont aussi à l'interaction avec de nombreux doctorants et étudiants perspicaces de l'EPFL dont les échanges ont contribué et continuent de contribuer à l'amélioration constante de ce cours.



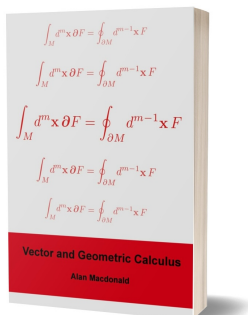
Riley, Hobson, Bence



Doran, Lasenby



Mac Donald (1)



Mac Donald (2)

1

Fonctions de Green

1.1 Introduction

Les fonctions de Green sont abondamment utilisées en mathématiques et en physique. Ces fonctions sont des solutions ponctuelles d'équations différentielles linéaires ordinaires inhomogènes ou d'équations différentielles aux dérivées partielles inhomogènes à coefficients constants. Ces "fonctions", qui ont été introduites par Green afin de résoudre des problèmes d'électromagnétisme, sont le plus souvent des distributions. Les équations de Poisson en mécanique et en électromagnétisme, les équations de diffusion ou les équations d'onde avec un terme de source peuvent être résolues grâce aux fonctions de Green. Elles apparaissent également dans la théorie de la réponse linéaire notamment en physique statistique ou encore en théorie de champs quantiques où ce sont des propagateurs introduits par Feynman. Les fonctions de Green sont donc un concept d'importance universelle en physique en général et dans ce cours en particulier.



Richard Feynman

Afin de pouvoir définir le formalisme de Green, les distributions de Dirac unidimensionnelles $\delta(x - x')$ et tridimensionnelle $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, qu'il ne faut pas confondre avec des fonctions, sont définies au préalable en sect. 1.2. On montre que ces distributions peuvent être obtenues comme limites de suites de fonctions, par exemple des gaussiennes ou des fonctions sinus cardinales. La fonction de Heaviside $\Theta(x - x')$, qui est une fonction en escalier, est définie comme intégrale de la distribution de Dirac $\delta(x - x')$ dans cette même section. Les équations différentielles ordinaires inhomogènes sont exprimées en sect. 1.3 en termes d'un opérateur linéaire \mathcal{L} de la manière suivante $\mathcal{L}g(x) = f(x)$, où $f(x)$ est un terme de source. La solution de cette équation différentielle $g(x) = \mathcal{L}^{-1}f(x)$ est le produit de convolution entre la fonction de Green et le terme de source, c'est-à-dire $g(x) = (G * f)(x)$. Afin de la résoudre, on considère une fonction ponctuelle $f(x) = \delta(x - x')$ satisfaisant l'équation de Green $\mathcal{L}G(x - x') = \delta(x - x')$. Afin d'obtenir la solution générale $g(x)$, on somme ensuite les contributions dues à un ensemble dénombrable de sources ponctuelles à l'aide d'une intégrale de la forme $g(x) = \int_a^b G(x - x')f(x')dx'$ qui est un produit de convolution.

Comme application physique des fonctions de Green, on considère le mouvement harmonique oscillatoire forcé en absence de frottement d'un point matériel de masse m attaché à un ressort de pulsation ω_0 en sect.1.4. A l'aide d'une force ponctuelle de la forme $f(t) = m v_0 \delta(t - t')$, où v_0 est une vitesse constante, la fonction de Green $G(t - t') = \omega_0^{-1} \sin(\omega_0(t - t')) \Theta(t - t')$ est déterminée en intégrant l'équation du mouvement compte tenu de la continuité de la déformation $x(t)$ et de la discontinuité de la vitesse de déformation $\dot{x}(t)$. En sect. (1.5), on considère le cas particulier d'une force d'entraînement périodique $f(t) = m a_0 \sin(\omega t)$. Lorsque la pulsation naturelle ω_0 et la pulsation d'entraînement ω sont proches, c'est-à-dire $\omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$ l'évolution temporelle de la déformation $x(t)$ fait apparaître des battements caractérisés par une enveloppe de pulsation lente $(\omega - \omega_0)/2$ et des oscillations internes de pulsation rapide $(\omega + \omega_0)/2$.

1.2 Distribution de Dirac

La distribution de Dirac de la variable scalaire $x \in \mathbb{R}$, qui n'est pas une fonction, est définie formellement de la manière suivante,

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

et elle satisfait la condition de normalisation,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (1.2)$$

qui est formellement une intégrale de Lebesgue en raison de la discontinuité en $x = 0$ (Fig. 1.1).



Paul Adrien Maurice
Dirac

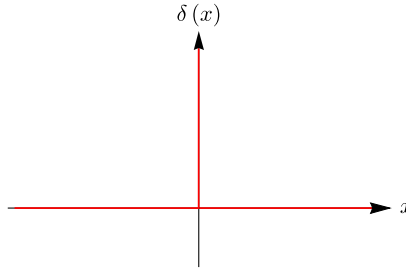


FIGURE 1.1 Distribution de Dirac $\delta(x)$ qui n'est pas une fonction. L'aire sous le graphe de la distribution (rouge) vaut 1.

De manière plus intuitive, on peut concevoir la distribution de Dirac comme une limite de suites de fonctions continues. Le premier exemple est celui des fonctions delta gaussiennes $\delta_n(x)$ de variance $\sigma^2 = 1/n^2$ qui tendent vers la distribution de Dirac $\delta(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (Fig. 3.4),

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} n^2 x^2}, \quad (1.3)$$

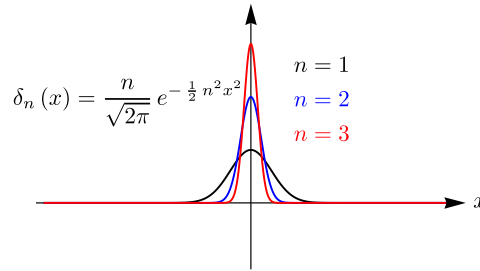


FIGURE 1.2 Suite de fonctions delta gaussiennes $\delta_n(x)$ de variance $\sigma^2 = 1/n^2$ qui tend vers la distribution de Dirac $\delta(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

où le facteur $\sqrt{2\pi}$ est un facteur de normalisation. Le deuxième exemple est celui des fonctions sinus cardinales $\delta_n(x)$ qui tendent vers la distribution de Dirac $\delta(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x}, \quad (1.4)$$

où le facteur π est un facteur de normalisation. Par abus de langage, on appelle communément la distribution de Dirac la “fonction delta”, ce qui n'est pas pertinent puisqu'une distribution de Dirac n'est pas une fonction. La fonction discontinue de Heaviside (Fig. 1.4) est définie comme l'intégrale de la distribution de Dirac,

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

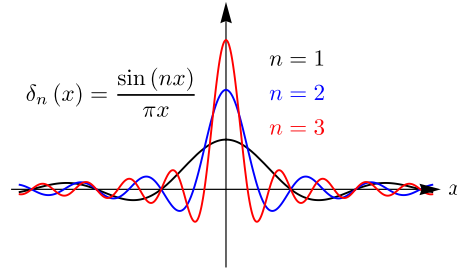


FIGURE 1.3 Suite de fonctions sinus cardinales $\delta_n(x)$ qui tend vers la distribution de Dirac $\delta(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

C'est une fonction en marche d'escalier appelée "step function" en anglais.

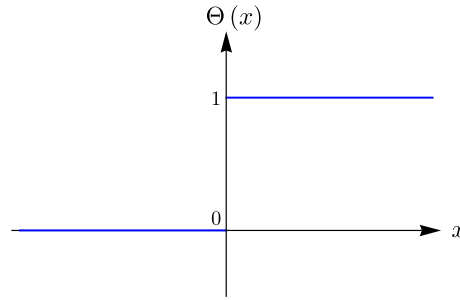


FIGURE 1.4 Fonction de Heaviside $\Theta(x)$ en marche d'escalier.

La distribution de Dirac (1.1) peut être traduite pour qu'elle diverge en $x = x'$,

$$\delta(x - x') = \begin{cases} \infty & \text{si } x = x', \\ 0 & \text{si } x \neq x'. \end{cases} \quad (1.6)$$

A l'aide de la condition de normalisation (1.2) et de la distribution de Dirac (1.6), la représentation intégrale de la fonction $f(x)$, où $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, s'écrit,

$$f(x) = f(x) \int_a^b \delta(x - x') dx' = \int_a^b f(x') \delta(x - x') dx'. \quad (1.7)$$

On en conclut que la dimension physique de la distribution $\delta(x - x')$ est $[m^{-1}]$ en unité SI, soit l'inverse de celle de la variable $x - x'$. On peut généraliser les distributions de Dirac à l'espace à trois dimensions \mathbb{R}^3 . La distribution de Dirac du vecteur $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$ est le produit des distributions de Dirac de ses composantes scalaires cartésiennes $x - x' \in \mathbb{R}$, $y - y' \in \mathbb{R}$ et $z - z' \in \mathbb{R}$,

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'). \quad (1.8)$$

Par conséquent, compte tenu de la condition de normalisation (1.2) à une dimension, la distribution de Dirac $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ dans l'espace à trois dimensions \mathbb{R}^3 satisfait la condition de normalisation,

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y') dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z') dz = 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

A l'aide de la condition de normalisation (1.9) et de la distribution de Dirac (1.8), la représentation intégrale de la fonction $f(\mathbf{r})$, où $\mathbf{r} \in V \subset \mathbb{R}^3$, s'écrit,

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' = \iiint_V f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r'. \quad (1.10)$$

On en conclut que la dimension physique de la distribution $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est $[m^{-3}]$ en unité SI, soit l'inverse du cube de celle de la variable $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.



Oliver Heaviside

1.3 Fonctions de Green

En physique, on est fréquemment confronté à des équations différentielles linéaires inhomogènes de la forme suivante,

$$\mathcal{L}g(x) = f(x) \quad \text{où } x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel linéaire qui satisfait la condition de linéarité,

$$\mathcal{L}(\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)) = \lambda_1 \mathcal{L}g_1(x) + \lambda_2 \mathcal{L}g_2(x), \quad (1.12)$$

et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On considère ici uniquement le cas où cet opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} est bijectif, ce qui implique qu'il existe un opérateur inverse \mathcal{L}^{-1} tel que,

$$\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}^{-1} = \hat{1}, \quad (1.13)$$

où $\hat{1}$ est l'opérateur identité. L'objectif du formalisme de Green est de résoudre l'équation différentielle (1.11) en déterminant la fonction $g(x)$ à l'aide d'une relation intégrale de la fonction $f(x)$ qui fait intervenir une fonction de Green. La démarche consiste à choisir un terme de source ponctuelle en $x = x'$ donné par une distribution de Dirac de la forme $f(x) = \delta(x - x')$ et à sommer ensuite les contributions dues à un ensemble dénombrable de sources ponctuelles. Cette somme est donc une intégrale. La fonction de Green $G(x - x')$ est définie comme la solution de l'équation différentielle (1.11) pour une source ponctuelle $f(x) = \delta(x - x')$, qui est l'équation de Green,

$$\mathcal{L}G(x - x') = \delta(x - x'). \quad (1.14)$$

La fonction $g(x)$ qui est solution de l'équation différentielle linéaire inhomogène (1.11), est le produit de convolution entre la fonction de Green $G(x - x')$ et la fonction $f(x)$ défini comme,

$$g(x) = \mathcal{L}^{-1}f(x) = (G * f)(x) = \int_a^b G(x - x')f(x')dx'. \quad (1.15)$$

Afin de démontrer ce résultat, compte tenu de la distribution de Dirac (1.7) et de l'équation de Green (1.14), on montre que l'action de l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} sur la solution (1.11) donne l'équation différentielle initiale,

$$\mathcal{L}g(x) = \int_a^b \mathcal{L}G(x - x')f(x')dx' = \int_a^b f(x')\delta(x - x')dx' = f(x), \quad \square \quad (1.16)$$

où l'opérateur \mathcal{L} agit uniquement sur la variable x et non la variable x' . On peut généraliser le formalisme de Green à l'espace à trois dimensions \mathbb{R}^3 . En physique, on est aussi fréquemment confronté à des équations différentielles linéaires inhomogènes dans \mathbb{R}^3 de la forme suivante,

$$\mathcal{L}g(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad \text{où } \mathbf{r} \in V \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.17)$$

L'objectif du formalisme de Green est de résoudre l'équation différentielle (1.17) en déterminant la fonction $g(\mathbf{r})$ à l'aide d'une relation intégrale de la fonction $f(\mathbf{r})$ qui fait intervenir une fonction de Green. La démarche consiste à choisir un terme de source ponctuelle en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ donné par une distribution de Dirac de la forme $f(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ et à sommer ensuite les contributions dues à un ensemble dénombrable de sources ponctuelles. Cette somme est donc une intégrale. La fonction de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est définie comme la solution de l'équation différentielle (1.17) pour une source ponctuelle $f(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, qui est l'équation de Green,

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.18)$$

La fonction $g(\mathbf{r})$ qui est solution de l'équation différentielle linéaire inhomogène (1.17), est le produit de convolution entre la fonction de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ et la fonction $f(\mathbf{r})$ défini comme,

$$g(\mathbf{r}) = \mathcal{L}^{-1}f(\mathbf{r}) = (G * f)(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')f(\mathbf{r}')d^3r'. \quad (1.19)$$



George Green

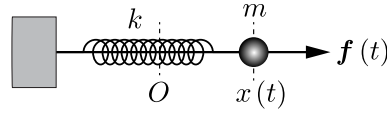


FIGURE 1.5 Oscillateur harmonique forcé constitué d'un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante élastique k soumis à une force d'entraînement $\mathbf{f}(t)$.

Afin de démontrer ce résultat, compte tenu de la distribution de Dirac (1.10) et de l'équation de Green (1.18), on montre que l'action de l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} sur la solution (1.17) donne l'équation différentielle initiale,

$$\mathcal{L}g(\mathbf{r}) = \iiint_V \mathcal{L}G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3r' = \iiint_V f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' = f(\mathbf{r}), \square \quad (1.20)$$

où l'opérateur \mathcal{L} agit uniquement sur le vecteur \mathbf{r} et non le vecteur \mathbf{r}' . Voici un résumé des différentes équations de Green que l'on retrouve en physique en pratique :

- équation de Green spatiale unidimensionnelle,

$$\mathcal{L}G(x - x') = \delta(x - x'), \quad (1.21)$$

- équation de Green spatiale tridimensionnelle,

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.22)$$

- équation de Green temporelle unidimensionnelle,

$$\mathcal{L}G(t - t') = \delta(t - t'), \quad (1.23)$$

- équation de Green spatio-temporelle bidimensionnelle,

$$\mathcal{L}G(x - x', t - t') = \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (1.24)$$

- équation de Green spatio-temporelle quadridimensionnelle,

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (1.25)$$

1.4 Oscillateur harmonique forcé

Comme application des fonctions de Green, on va résoudre l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique forcé à une dimension en absence de frottement. L'équation du mouvement est une équation différentielle ordinaire, linéaire, inhomogène du deuxième ordre. On considère donc un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante élastique k soumis à une force élastique $\mathbf{f}_e(t)$ et à une force d'entraînement $\mathbf{f}(t)$ (Fig. 1.5),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e(t) &= -k \mathbf{x}(t) = -k x(t) \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{f}(t) &= f(t) \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

où le point matériel oscille uniquement selon l'axe horizontal des abscisses de vecteur unitaire $\hat{\mathbf{x}}$. L'équation du mouvement du point matériel est exprimée en termes de la déformation $x(t)$ et de sa dérivée seconde $\ddot{x}(t)$ comme,

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} f(t), \quad (1.27)$$

où la pulsation naturelle ω_0 est définie comme,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.28)$$

Dans un premier temps, on va déterminer la déformation due à une force d'entraînement ponctuelle agissant au temps $t = t'$ de la forme,

$$f(t) = m v_0 \delta(t - t'), \quad (1.29)$$

où v_0 est une vitesse constante. La déformation $x(t)$ est nulle avant l'action de la force d'entraînement ponctuelle, c'est-à-dire si $t < t'$. Après l'action de la force ponctuelle, c'est-à-dire si $t > t'$ alors $f(t) = 0$, la déformation est celle d'un mouvement harmonique oscillatoire dont les amplitudes $A(t')$ et $B(t')$ dépendent du temps t' ,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t', \\ A(t') e^{i\omega_0 t} + B(t') e^{-i\omega_0 t} & \text{si } t > t'. \end{cases} \quad (1.30)$$

Par conséquent, la vitesse de déformation, qui est la dérivée temporelle de la déformation s'écrit,

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t', \\ i\omega_0 (A(t') e^{i\omega_0 t} - B(t') e^{-i\omega_0 t}) & \text{si } t > t'. \end{cases} \quad (1.31)$$

Afin de déterminer l'évolution temporelle de la déformation $x(t)$, on intègre l'équation du mouvement (1.27) par rapport au temps t dans l'intervalle $[t' - \varepsilon, t' + \varepsilon]$ dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} (\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)) dt = v_0 \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t - t') dt = v_0. \quad (1.32)$$

Par continuité de la déformation $x(t)$ au voisinage du temps $t = t'$, l'intégrale du deuxième terme du membre de gauche de la relation intégrale (1.32) s'annule,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \omega_0^2 x(t) dt = 0. \quad (1.33)$$

Par conséquent, l'intégrale de l'équation du mouvement (1.32) donne la discontinuité de la vitesse de déformation,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \ddot{x}(t) dt = v_0. \quad (1.34)$$

En intégrant le membre de gauche de l'équation (1.34), on obtient la relation,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\dot{x}(t' + \varepsilon) - \dot{x}(t' - \varepsilon)) = v_0. \quad (1.35)$$

La déformation est initialement nulle,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t' - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t' + \varepsilon) = 0. \quad (1.36)$$

La vitesse de déformation au temps $t < t'$ est nulle. Ainsi, compte tenu de la discontinuité (1.35), les vitesses de déformation avant et après $t = t'$ sont les suivantes,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(t' - \varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(t' + \varepsilon) = v_0. \quad (1.37)$$

Compte tenu de l'identité (1.36), la déformation (1.30) évaluée au temps initial où $t \rightarrow t'$ s'annule,

$$x(t') = A(t') e^{i\omega_0 t'} + B(t') e^{-i\omega_0 t'} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t' + \varepsilon) = 0. \quad (1.38)$$

Compte tenu de l'identité (1.37), la vitesse de déformation (1.31) évaluée au temps initial où $t \rightarrow t'$ s'écrit,

$$\dot{x}(t') = i\omega_0 (A(t') e^{i\omega_0 t'} - B(t') e^{-i\omega_0 t'}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(t' + \varepsilon) = v_0. \quad (1.39)$$

En résolvant les systèmes d'équations (1.38) et (1.39), on en détermine les deux coefficients,

$$A(t') = \frac{v_0}{2i\omega_0} e^{-i\omega_0 t'} \quad \text{et} \quad B(t') = -\frac{v_0}{2i\omega_0} e^{i\omega_0 t'}. \quad (1.40)$$

A l'aide des coefficients (1.40) et de la fonction Heaviside (1.5) assurant la causalité, c'est-à-dire $t > t'$, la déformation (1.30) due à la force ponctuelle s'écrit,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \right) \Theta(t - t') = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t')) \Theta(t - t'). \quad (1.41)$$

A présent, on va déterminer l'évolution temporelle de la déformation $x(t)$ pour une force d'entraînement quelconque $f(t)$. L'équation différentielle du mouvement (1.27) est une équation linéaire qui peut être écrite en termes de l'opérateur différentiel linéaire,

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2, \quad (1.42)$$

de la manière suivante,

$$\mathcal{L} x(t) = \frac{1}{m} f(t). \quad (1.43)$$

Pour une force d'entraînement ponctuelle (1.29), l'équation du mouvement (1.43) devient,

$$\mathcal{L} x(t) = v_0 \delta(t - t'). \quad (1.44)$$

Compte tenu de l'opérateur différentiel linéaire (1.42), l'équation de Green temporelle (1.23) s'écrit,

$$\mathcal{L} G(t - t') = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) G(t - t') = \delta(t - t'). \quad (1.45)$$

En comparant les équations différentielles (1.44) et (1.45) compte tenu de la déformation (1.41), on en déduit la fonction de Green temporelle,

$$G(t - t') = \frac{x(t)}{v_0} = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t')) \Theta(t - t'). \quad (1.46)$$

La solution de l'équation différentielle (1.43) est le produit de convolution entre la fonction de Green $G(t - t')$ et la force d'entraînement $f(t')$,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} f(t) = \frac{1}{m} (G * f)(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G(t - t') f(t') dt'. \quad (1.47)$$

En effet, compte tenu de l'opérateur différentiel linéaire (1.42) et de l'équation de Green (1.45), on en déduit l'équation du mouvement (1.43),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} x(t) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) G(t - t') f(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t \delta(t - t') f(t') dt' = \frac{1}{m} f(t). \quad \square \end{aligned} \quad (1.48)$$

Compte tenu de la causalité décrite par la fonction de Heaviside $\Theta(t - t')$, la fonction de Green temporelle (1.46) est remise en forme comme,

$$G(t - t') = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t', \\ \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t')) & \text{si } t > t'. \end{cases} \quad (1.49)$$

En substituant la fonction de Green temporelle (1.49) dans le produit de convolution (1.47), on obtient l'évolution temporelle de la déformation pour une force d'entraînement quelconque,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t - t')) f(t') dt'. \quad (1.50)$$

1.5 Oscillateur harmonique forcé périodiquement

A présent, on cherche à déterminer la déformation $x(t)$ due à une force d'entraînement périodique de la forme,

$$f(t') = f_0 \sin(\omega t') = m a_0 \sin(\omega t') = m a_0 \frac{e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}}{2i}. \quad (1.51)$$

En substituant la force périodique (1.51) dans la déformation (1.50), elle devient,

$$x(t) = \frac{a_0}{\omega_0} \int_0^t \left(\frac{e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}}{2i} \right) dt'$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a_0 e^{i\omega_0 t}}{4\omega_0} \int_0^t \left(e^{i(\omega-\omega_0)t'} - e^{-i(\omega+\omega_0)t'} \right) dt' \\
&\quad - \frac{a_0 e^{-i\omega_0 t}}{4\omega_0} \int_0^t \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t'} - e^{i(\omega+\omega_0)t'} \right) dt' \\
&= \frac{a_0}{4\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_0^t \left(e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' \\
&\quad + \frac{a_0}{4\omega_0} \left(e^{i\omega_0 t} \int_0^t \left(e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' \right)^*
\end{aligned} \tag{1.52}$$

La somme d'un nombre complexe et de son conjugué complexe est deux fois sa partie réelle. Ainsi, la déformation se réduit à,

$$\frac{a_0}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left(e^{i\omega_0 t} \int_0^t \left(e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' \right). \tag{1.53}$$

La solution de l'intégrale intervenant dans l'expression (1.53) de la déformation est,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' \\
&= \left. \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)t'}}{-i(\omega+\omega_0)} \right|_0^t - \left. \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t'}}{i(\omega-\omega_0)} \right|_0^t = i \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)t} - 1}{\omega + \omega_0} + i \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t} - 1}{\omega - \omega_0}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Par conséquent, la déformation (1.53) devient,

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left(i \left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega_0 t}}{\omega + \omega_0} \right) + i \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{i\omega_0 t}}{\omega - \omega_0} \right) \right). \tag{1.55}$$

Compte tenu des identités,

$$\operatorname{Re} (i e^{\pm i\omega t}) = \mp \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} (i e^{\pm i\omega_0 t}) = \mp \sin(\omega_0 t), \tag{1.56}$$

la déformation (1.55) est remise en forme comme,

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0} \left(\frac{\sin(\omega t) + \sin(\omega_0 t)}{\omega + \omega_0} - \frac{\sin(\omega t) - \sin(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0} \right). \tag{1.57}$$

On constate qu'en absence de force d'entraînement, c'est-à-dire $\omega = 0$, la déformation est nulle,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} x(t) = 0, \tag{1.58}$$

comme il se doit. Dans la limite où les pulsations sont proches, c'est-à-dire $\omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$, le premier terme de la déformation (1.57) est négligeable par rapport au deuxième,

$$x(t) \simeq -\frac{a_0}{2\omega_0} \frac{\sin(\omega t) - \sin(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0}. \tag{1.59}$$

Compte tenu de l'identité trigonométrique,

$$\sin(\omega t) - \sin(\omega_0 t) = \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right), \tag{1.60}$$

l'évolution temporelle de la déformation (1.59),

$$x(t) \simeq -\frac{a_0}{2\omega_0(\omega - \omega_0)} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right), \tag{1.61}$$

décrit des battements caractérisés par une enveloppe de pulsation lente $(\omega - \omega_0)/2$ et des oscillations internes de pulsation rapide $(\omega + \omega_0)/2$ (Fig. 1.6).

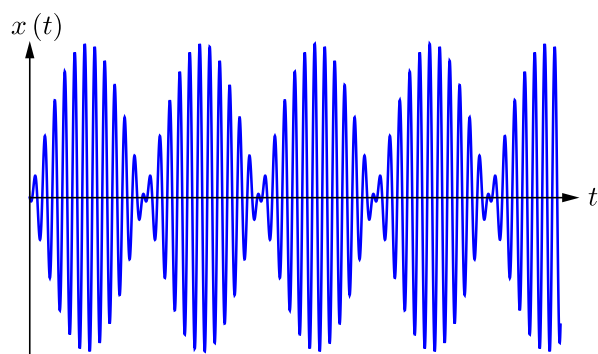


FIGURE 1.6 Battements caractérisés par une enveloppe de pulsation lente $(\omega - \omega_0)/2$ et des oscillations internes de pulsation rapide $(\omega + \omega_0)/2$ lorsque les pulsations sont proches, c'est-à-dire $\omega \simeq \omega_0$.

2

Analyse complexe

2.1 Introduction

L'analyse complexe est un outil fondamental en physique. Cet outil permet de simplifier la résolution de certains problèmes comme l'oscillateur harmonique classique ou le flux d'un fluide. Il devient essentiel et même incontournable en mécanique quantique par exemple.

L'équivalent d'une fonction dérivable en analyse complexe est une fonction holomorphe qui satisfait les équations de Cauchy-Riemann liant les dérivées partielles des parties réelle et imaginaire. Ces équations ainsi que l'équation de Laplace qui en résulte sont établies en sect. 2.2. Le théorème de Cauchy, qui est le fondamental de l'analyse complexe, affirmant que l'intégrale sur un chemin fermé d'une fonction holomorphe est nulle est démontré en sect. 2.3 à l'aide du théorème du rotationnel de l'analyse vectorielle. La formule de Cauchy qui en résulte est aussi introduite dans cette section. Les séries de Laurent, qui sont des développements en séries de puissances entières (positives et négatives) d'une fonction autour d'une singularité sont définies en sect. 2.4. Dans cette section, on montre que pour le calcul de l'intégrale de contour d'une telle fonction autour de sa singularité le seul terme de la série de Laurent qui donne une contribution non-nulle est le terme de degré -1 . Les pôles simples et d'ordre n ainsi que les résidus de la fonction complexe qui leur sont associés sont définis en sect. 2.5. A l'aide du théorème de Cauchy et des résidus, on établit le théorème des résidus dans cette même section.

Comme application physique de l'analyse complexe, on détermine en sect. (2.6) le potentiel électrostatique $\phi(x, y)$ dans un plan horizontal à l'intérieur d'un cylindre conducteur creux d'axe de symétrie vertical. Le cylindre est constitué de deux demi cylindres conducteurs creux portés à des potentiels électrostatiques $\phi_+ > 0$ et $\phi_- < 0$, maintenus ensemble par un joint isolant. Etant donné qu'il n'y a pas de charge électrique dans la cavité cylindrique, le potentiel électrostatique satisfait l'équation de Laplace. Cela signifie que par continuation analytique, on peut considérer ce potentiel comme la partie réelle d'une fonction holomorphe, c'est-à-dire $\phi(x, y) = \text{Re } f(z)$. A l'aide de l'opération d'inversion d'un cercle dans le plan complexe \mathbb{C} ainsi que du théorème, de la formule de Cauchy et d'une identité remarquable, on parvient à déterminer une forme explicite pour le potentiel électrostatique en coordonnées polaires $\phi(r, \theta)$ puis en coordonnées cartésiennes $\phi(x, y)$. Cette identité remarquable liant les fonction arctangente et logarithme est établie en sect. 2.8.

En guise d'application physique du théorème des résidus, on montre que la loi d'Ampère est une conséquence de ce théorème en sect. 2.7. Par isomorphisme entre le plan qui contient la courbe fermée et le plan complexe, on écrit la circulation du champ magnétique auxiliaire comme une intégrale de contour dans le plan complexe. Les singularités $z_1 \dots z_k$ du champ magnétique complexe $H(z)$ à l'intérieur du contour \mathcal{C} ont pour origine physique l'intersection entre les courants électriques $I_1 \dots I_k$ et le plan complexe. En réalité, les courants électriques sont des multiples des résidus associés aux pôles simples dus aux singularités.

2.2 Equations de Cauchy-Riemann et de Laplace

On considère une fonction à valeur complexe dérivable en $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) , \quad (2.1)$$

où $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ est la partie réelle et $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ est la partie imaginaire. La dérivée de la fonction $f(z)$ par rapport à z s'écrit à l'aide de la limite $\Delta z \rightarrow 0$ comme,

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x, y) + i \Delta v(x, y)}{\Delta x + i \Delta y}. \quad (2.2)$$

Etant donné que les limites des variables réelle $\Delta x \rightarrow 0$ et imaginaire $\Delta y \rightarrow 0$ commutent, il y a deux manières de calculer la dérivée de la fonction $f(z)$ par rapport à z . Premièrement, on prend la limite $\Delta y \rightarrow 0$ et ensuite la limite $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Deuxièmement, on prend la limite $\Delta x \rightarrow 0$ et ensuite la limite $\Delta y \rightarrow 0$,

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} - i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Comme les deux expressions (2.3) et (2.4) de la dérivée de la fonction complexe $f(z)$ par rapport à z doivent être les mêmes, leurs parties réelle et imaginaire doivent être égales, ce qui donne les équations de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Une fonction dont les parties réelle $u(x, y)$ et imaginaire $v(x, y)$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann (2.5) est une fonction holomorphe. Etant donné que le plan complexe \mathbb{C} n'a pas courbure, les parties réelle $u(x, y)$ et imaginaire $v(x, y)$ satisfont le théorème de Schwarz qui affirme que leurs dérivées partielles commutent,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x}. \quad (2.6)$$

Ainsi, le théorème de Schwarz appliqué aux dérivées partielles secondes des parties réelle $u(x, y)$ et imaginaire $v(x, y)$ de la fonction complexe holomorphe $f(z)$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par conséquent, les équations de Laplace des parties réelle $u(x, y)$ et imaginaire $v(x, y)$ de la fonction holomorphe $f(z)$ sont nulles,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x, y) &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \\ \nabla^2 v(x, y) &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.3 Théorème et formule de Cauchy

Le théorème de Cauchy affirme que l'intégrale le long d'un contour fermé \mathcal{C} dans le plan complexe \mathbb{C} d'une fonction holomorphe $f(z)$ à l'intérieur de ce contour est nulle,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0. \quad (2.9)$$

Afin de démontrer ce théorème, on décompose l'intégrale en parties réelle et imaginaire,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}} (u + iv)(dx + idy) = \oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy). \quad (2.10)$$

Soient \mathcal{A} l'aire délimitée par le contour fermé \mathcal{C} dans le plan complexe \mathbb{C} , $ds = dx \hat{x} + dy \hat{y}$ le vecteur déplacement infinitésimal tangent à la courbe \mathcal{C} et $d\mathcal{A} = dx dy \hat{z}$ le vecteur surface infinitésimale orthogonal au plan complexe orienté dans le sens trigonométrique d'après la règle de la main droite. Les vecteurs unitaires \hat{x} et \hat{y} sont orientés dans le sens croissant



Bernhard Riemann



Pierre-Simon de Laplace

des axes réel et imaginaire respectivement. En appliquant le théorème du rotationnel à un champ vectoriel complexe $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}}$, on obtient,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} (v_x dx + v_y dy) = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.11)$$

Compte tenu des équations de Cauchy-Riemann (2.5) satisfaites par toute fonction holomorphe, l'intégrale de contour (2.11) pour le champ vectoriel complexe $\mathbf{v} = u \hat{\mathbf{x}} - v \hat{\mathbf{y}}$, c'est-à-dire $v_x = u$ et $v_y = -v$, s'annule,

$$\oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) = - \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (2.12)$$

Compte tenu des équations de Cauchy-Riemann (2.5) satisfaites par toute fonction holomorphe, l'intégrale de contour (2.11) pour le champ vectoriel complexe $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{x}} + u \hat{\mathbf{y}}$, c'est-à-dire $v_x = v$ et $v_y = u$, s'annule,

$$\oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy) = \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (2.13)$$

Au vu des intégrales (2.12) et (2.13), l'intégrale (2.10) le long du contour fermé \mathcal{C} de la fonction holomorphe $f(z)$ s'annule,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy) = 0. \quad \square \quad (2.14)$$

Afin d'établir la formule intégrale de Cauchy, on détermine l'intégrale de contour d'une fonction non-holomorphe $g(z)$ avec une singularité en $z = z_0$ qui est exprimée en termes d'une fonction holomorphe $f(z)$ de la manière suivante,

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}. \quad (2.15)$$

Compte tenu du théorème de Cauchy (2.12), la contribution non-nulle de l'intégrale de contour de la fonction $g(z)$ le long d'un chemin fermé quelconque \mathcal{C} provient de la singularité en $z = z_0$. Sans perte de généralité, on choisit une courbe circulaire \mathcal{C} de rayon r donné autour de z_0 ,

$$z = z_0 + r e^{i\theta} \quad \text{ainsi} \quad dz = i r e^{i\theta} d\theta, \quad (2.16)$$

et on fait tendre le rayon r vers zéro. Dans cette limite, l'intégrale de contour de la fonction $g(z)$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} g(z) dz &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= f(z_0) i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0), \end{aligned} \quad (2.17)$$

ce qui donne la formule intégrale de Cauchy pour la fonction holomorphe $f(z)$ à l'intérieur du chemin fermé \mathcal{C} ,

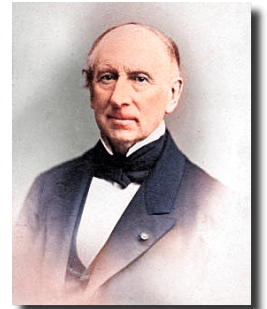
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.18)$$

2.4 Série de Laurent

On considère une fonction $f(z)$ qui est holomorphe dans le domaine $\mathbb{C} \setminus z_0$ autour d'une singularité en $z = z_0$. De plus, cette fonction admet un développement en série de puissances autour de ce point ce qui signifie qu'elle est analytique dans ce domaine. La série de Laurent de cette fonction s'écrit,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (2.19)$$

Cette série est une extension de la série de Taylor aux puissances négatives. L'intégrale de contour de la série de Laurent de la fonction $f(z)$ s'écrit,



Augustin Louis
Cauchy



Pierre Alphonse
Laurent

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^n dz. \quad (2.20)$$

Dans le cas $n \neq -1$, à l'aide du changement de variable (2.16), l'intégrale (2.20) s'annule,

$$\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = r^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)\theta}}{n+1} \right|_0^{2\pi} = 0. \quad (2.21)$$

Dans le cas $n = -1$, à l'aide du changement de variable (2.16), l'intégrale (2.20) donne le résultat suivant,

$$\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^{-1} dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \quad (2.22)$$

Compte tenu des relations (2.21) et (2.22), l'intégrale de contour (2.20) de la série de Laurent de la fonction $f(z)$ se réduit à,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = a_{-1} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i a_{-1}. \quad (2.23)$$

2.5 Théorème des résidus

On considère une fonction $f(z)$ qui a une singularité en $z = z_0$. La singularité est un pôle simple si le terme du plus petit degré non-nul de la série de Laurent de cette fonction est $n = -1$. Dans ce cas, on obtient l'identité,

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0 (z - z_0) + a_1 (z - z_0)^2 + \dots \quad (2.24)$$

Le résidu d'un pôle simple est le coefficient a_{-1} de la série de Laurent de la fonction $f(z)$,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (2.25)$$

La singularité est un pôle d'ordre n si le terme du plus petit degré non-nul de la série de Laurent de cette fonction est $-n$. Dans ce cas, on obtient l'identité,

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{n-1} + a_0 (z - z_0)^n + \dots \quad (2.26)$$

Le résidu d'un pôle d'ordre n est le coefficient a_{-1} de la série de Laurent de la fonction $f(z)$,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right). \quad (2.27)$$

Afin d'établir le théorème des résidus, on considère une fonction $f(z)$ qui a n singularités $\{z_1, \dots, z_n\}$ dans le plan complexe \mathbb{C} . On choisit un contour \mathcal{C} orienté dans le sens trigonométrique qui contourne chaque singularité à l'aide de n branches de largeur infinitésimale qui les entourent avec n arcs de cercle $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ orientés dans le sens horaire (Fig. 7.3). Le théorème de Cauchy (2.9) appliquée le long de la courbe fermée $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$ qui contourne toutes les singularités s'écrit,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz + \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \dots + \oint_{\mathcal{C}_n} f(z) dz = 0, \quad (2.28)$$

et peut être remis en forme comme,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = - \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz - \dots - \oint_{\mathcal{C}_n} f(z) dz. \quad (2.29)$$

Dans la limite où les largeurs des branches tendent vers zéro, les contours intérieurs $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ se ferment et ils contiennent chacun une singularité, à savoir z_1, \dots, z_n . L'intégrale de la série de Laurent pour le contour \mathcal{C}_k s'écrit,

$$\oint_{\mathcal{C}_k} f(z) dz = -2\pi i a_{-1,k} = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \quad (2.30)$$

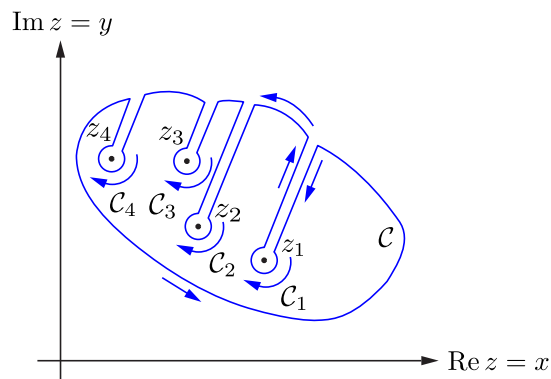


FIGURE 2.1 La courbe fermée \mathcal{C} est orientée dans le sens trigonométrique. Elle entoure les 4 singularités z_1, z_2, z_3 et z_4 à l'aide de 4 branches de largeur infinitésimale avec 4 arcs de cercle $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_4 orientés dans le sens horaire.

où le signe moins est dû au fait que le contour \mathcal{C}_k est orienté dans le sens horaire. Compte tenu de l'intégrale de la série de Laurent (2.30) pour tous les contours intérieurs $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, on obtient le théorème des résidus,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (2.31)$$

Le signe du membre de droite est positif parce que le contour \mathcal{C} est orienté dans le sens trigonométrique. Si le contour \mathcal{C} était orienté dans le sens horaire, ce qui arrive fréquemment, il faudrait alors ajouter un signe moins dans le membre de droite afin d'en tenir compte.

2.6 Potentiel électrostatique dans un cylindre

Comme application physique de l'analyse complexe, on considère un conducteur métallique cylindrique creux de rayon R et d'axe de symétrie vertical Oz . Le cylindre est suffisamment long pour que les effets de bord puissent être négligés. Il est constitué de deux demi cylindres verticaux maintenus ensemble par un joint isolant. Des charges électriques positives sont réparties de manière homogène sur le demi cylindre dont la coordonnée d'ordonnée est positive (rouge), c'est-à-dire $y > 0$, et des charges électriques négatives, de norme égale, sont réparties de manière homogène sur le demi cylindre dont la coordonnée d'ordonnée est négative (bleu), c'est-à-dire $y < 0$ (Fig. 2.2). Par conséquent, la surface du premier

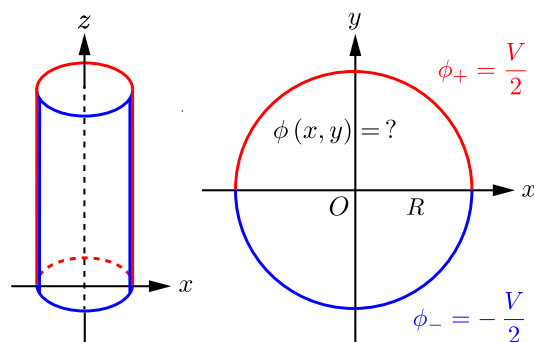


FIGURE 2.2 Le cylindrique creux est constitué de deux demi cylindres verticaux conducteurs de rayon R portés à des potentiels électrostatiques positif $\phi_+ = V/2$ (rouge) et négatif $\phi_- = -V/2$ (bleu). Le potentiel électrostatique dans le plan en coupe passant par l'origine O est $\phi(x, y)$.

demi cylindre est porté à un potentiel électrostatique positif ϕ_+ et la surface du deuxième

demi-cylindre est portée à un potentiel électrostatique négatif ϕ_- ,

$$\phi = \begin{cases} \phi_- = \frac{V}{2} & \text{si } x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } y > 0, \\ \phi_+ = -\frac{V}{2} & \text{si } x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } y < 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

où V représente la tension constante entre les deux conducteurs. Par symétrie de translation verticale, on cherche à déterminer le potentiel électrostatique $\phi(x, y)$ dans le plan en coupe à l'intérieur du cylindre où $x^2 + y^2 < R^2$ (Fig. 2.2). L'équation de Gauss pour le champ électrique \mathbf{E} à l'intérieur de la cavité cylindrique où la densité de charge électrique est nulle s'écrit,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.33)$$

En électrostatique, le potentiel magnétostatique \mathbf{A} est uniforme et constant. Ainsi, le champ électrique dérive simplement du potentiel électrostatique,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (2.34)$$

Par conséquent, le potentiel électrostatique satisfait l'équation de Laplace qui s'écrit en coordonnées cartésiennes comme,

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (2.35)$$

D'après l'analyse complexe, on sait que les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe $f(z)$ satisfont une équation de Laplace (2.8). Par continuité analytique, on associe alors le potentiel électrostatique $\phi(x, y)$ dans le plan circulaire de la cavité cylindrique passant par l'origine O à la partie réelle d'une fonction holomorphe $f(z)$,

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad (2.36)$$

où la variable complexe z , à ne pas confondre avec la coordonnée verticale de l'axe du cylindre, est liée aux coordonnées cartésiennes x et y de la manière suivante,

$$z = \frac{x + iy}{R} \quad \text{ainsi} \quad |z| < 1. \quad (2.37)$$

Afin de pouvoir déterminer le potentiel électrostatique à l'aide d'une intégrale de contour dans le plan complexe, on définit au préalable l'opération d'inversion du cercle, qui envoie un nombre complexe z sur l'inverse de son conjugué complexe,

$$z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{ainsi si } |z| < 1 \quad \text{alors} \quad \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| > 1. \quad (2.38)$$

Cette fonction envoie un nombre complexe z à l'intérieur du cercle sur un nombre complexe

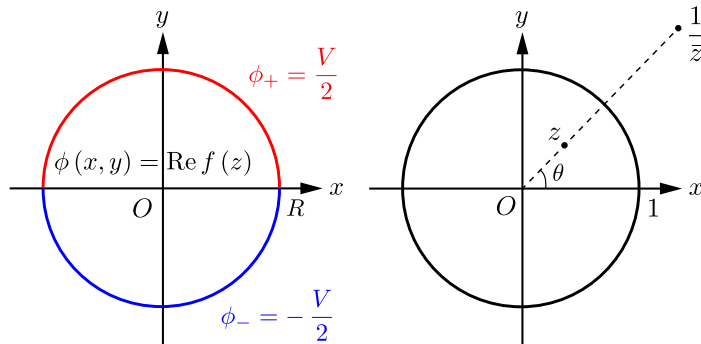


FIGURE 2.3 La surface du cylindre dans le plan en coupe est une cercle défini par $|z| = 1$. Tout point z qui se trouve à l'intérieur du cercle est envoyé par inversion du cercle sur un point $1/\bar{z}$ de module inverse et de même argument θ se trouvant à l'extérieur du cercle.

à l'extérieur du cercle de module inverse et de même argument θ (Fig. 2.3),

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \text{alors} \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|z| e^{-i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{i\theta}. \quad (2.39)$$

La formule de Cauchy (2.18) pour un nombre complexe z à l'intérieur du cercle, c'est-à-dire $|z| < 1$, s'écrit,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad (2.40)$$

où le contour $\mathcal{C} = \{w \text{ tel que } |w| = 1\}$ est le cercle de module unité. Par inversion du cercle, le nombre complexe $1/\bar{z}$ est donc nécessairement à l'extérieur du cercle. On peut alors appliquer le théorème de Cauchy à la fonction holomorphe $g(z)$,

$$\oint_{|w|=1} g(w) dw = \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w - \frac{1}{\bar{z}}} dw = 0. \quad (2.41)$$

La différence entre la formule de Cauchy (2.40) et le théorème de Cauchy (2.41) s'écrit,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w - \frac{1}{\bar{z}}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} f(w) \left(\frac{w}{w-z} - \frac{w}{w - \frac{1}{\bar{z}}} \right) \frac{dw}{w}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Etant donné que le point w se trouve sur ce cercle, on écrit ce nombre complexe à l'aide de sa représentation polaire,

$$w = e^{i\alpha} \quad \text{alors} \quad \frac{dw}{w} = i d\alpha. \quad (2.43)$$

Par conséquent, la représentation intégrale (2.42) de $f(z)$ devient,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha. \quad (2.44)$$

Par définition (2.36) de la fonction holomorphe $f(z)$, le potentiel électrostatique $\phi(x, y)$ s'écrit,

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha. \quad (2.45)$$

Compte tenu de la définition (2.32), le potentiel électrostatique en un point w sur la surface du conducteur est,

$$\phi = \operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) = \begin{cases} \phi_+ = \frac{V}{2} & \text{si } \alpha \in (0, \pi), \\ \phi_- = -\frac{V}{2} & \text{si } \alpha \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \quad (2.46)$$

En substituant le potentiel électrostatique sur la surface du cylindre (2.46) dans l'intégrant de ce potentiel à l'intérieur du cylindre (2.45) l'intégrale peut alors être évaluée comme suit,

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{V}{2} \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{V}{2} \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \\ &= \frac{V}{4\pi i} \int_0^\pi \left(\frac{d(e^{i\alpha} - z)}{e^{i\alpha} - z} - \frac{d(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}})}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \\ &\quad - \frac{V}{4\pi i} \int_\pi^{2\pi} \left(\frac{d(e^{i\alpha} - z)}{e^{i\alpha} - z} - \frac{d(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}})}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \\ &= \frac{V}{4\pi i} \left[\ln(e^{i\alpha} - z) - \ln\left(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}\right) \right]_0^\pi \\ &\quad - \frac{V}{4\pi i} \left[\ln(e^{i\alpha} - z) - \ln\left(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}\right) \right]_\pi^{2\pi} \\ &= \frac{V}{4\pi i} \left(\left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right) \right]_0^\pi - \left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right) \right]_\pi^{2\pi} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

A l'aide de l'identité logarithmique,

$$\ln(-\bar{z} e^{i\alpha}) = \ln\left(\bar{z} e^{i(\alpha+\pi)}\right) = \ln(\bar{z}) + i(\alpha + \pi), \quad (2.48)$$

on en déduit la relation suivante,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right) &= \ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{\left(-\frac{e^{-i\alpha}}{\bar{z}}\right)(1 - e^{i\alpha} \bar{z})}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}}\right) + \ln(-\bar{z} e^{i\alpha}) = \ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}}\right) + \ln(\bar{z}) + i(\alpha + \pi). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Compte tenu de l'identité (2.49), les deux derniers termes de l'expression du potentiel électrostatique (2.47) à l'intérieur du cylindre évalués en α , avec z fixé, deviennent,

$$\begin{aligned} \left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right)\right]_0^\pi &= \left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}}\right)\right]_0^\pi + [i(\alpha + \pi)]_0^\pi \\ &= \ln\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right) - \ln\left(\frac{1-z}{1-\bar{z}}\right) + i(2\pi - \pi) = \ln\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1+\bar{z})(1-z)}\right) + i\pi, \\ \left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right)\right]_\pi^{2\pi} &= \left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}}\right)\right]_\pi^{2\pi} + [i(\alpha + \pi)]_\pi^{2\pi} \\ &= \ln\left(\frac{1-z}{1-\bar{z}}\right) - \ln\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right) + i(3\pi - 2\pi) = \ln\left(\frac{(1-z)(1+\bar{z})}{(1-\bar{z})(1+z)}\right) + i\pi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ainsi, la différence entre les deux termes (2.50) est,

$$\begin{aligned} &\left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right)\right]_0^\pi - \left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right)\right]_\pi^{2\pi} \\ &= \ln\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1+\bar{z})(1-z)}\right) - \ln\left(\frac{(1-z)(1+\bar{z})}{(1-\bar{z})(1+z)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(1+z)^2(1-\bar{z})^2}{(1+\bar{z})^2(1-z)^2}\right) = 2\ln\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1+\bar{z})(1-z)}\right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

En substituant l'identité (2.51) dans le potentiel électrostatique à l'intérieur du cylindre (2.47), celui-ci devient,

$$\phi(x, y) = \frac{V}{2\pi i} \ln\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1+\bar{z})(1-z)}\right) = \frac{V}{2\pi i} \ln\left(\frac{1+(z-\bar{z})-|z|^2}{1-(z-\bar{z})-|z|^2}\right), \quad (2.52)$$

où $|z|^2 = z\bar{z}$. A l'aide de la représentation polaire,

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \bar{z} = r e^{-i\theta}, \quad (2.53)$$

à l'intérieur du disque, où $r = |z| < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi)$, ce qui implique que,

$$z - \bar{z} = r(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2ir \sin \theta, \quad (2.54)$$

le potentiel électrostatique (2.52) est exprimé en coordonnées polaires comme,

$$\phi(r, \theta) = \frac{V}{2\pi i} \ln\left(\frac{1 - r^2 + 2ir \sin \theta}{1 - r^2 - 2ir \sin \theta}\right) = \frac{V}{\pi} \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1 + i \frac{2r \sin \theta}{1-r^2}}{1 - i \frac{2r \sin \theta}{1-r^2}}\right). \quad (2.55)$$

A l'aide de l'identité remarquable qui sera établie en sect. 2.8,

$$\arctan\left(\frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}\right) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1 + i \frac{2r \sin \theta}{1-r^2}}{1 - i \frac{2r \sin \theta}{1-r^2}}\right), \quad (2.56)$$

le potentiel électrostatique (2.52) devient,

$$\phi(r, \theta) = \frac{V}{\pi} \arctan\left(\frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}\right). \quad (2.57)$$

Compte tenu des changements de variables (2.37) et (2.53),

$$z = \frac{x + iy}{R} = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta, \quad (2.58)$$

on en déduit que,

$$r^2 = |z|^2 = \frac{x^2 + y^2}{R^2} \quad \text{et} \quad r \sin \theta = \frac{y}{R}. \quad (2.59)$$

A l'aide des identités (2.59), le potentiel électrostatique (2.57) est finalement exprimé en coordonnées cartésiennes comme,

$$\phi(x, y) = \frac{V}{\pi} \arctan \left(\frac{2 R y}{R^2 - x^2 - y^2} \right). \quad (2.60)$$

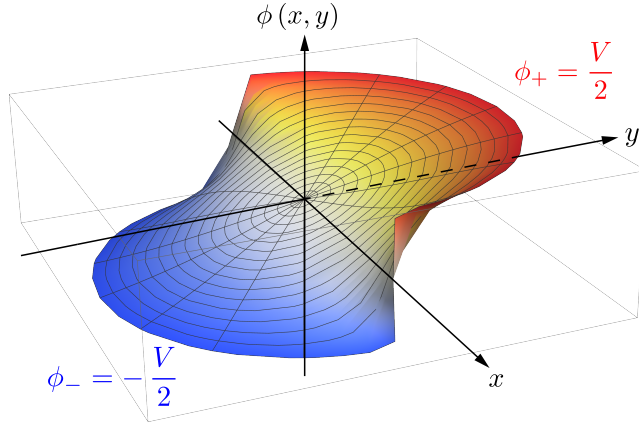


FIGURE 2.4 Le potentiel électrostatique $\phi(x, y)$ à l'intérieur du cercle est une interpolation entre la valeur minimale ϕ_- (bleu) et la valeur maximale ϕ_+ (rouge).

On constate que le potentiel électrostatique $\phi(x, y)$ à l'intérieur du cylindre dans le plan en coupe varie continument entre sa valeur minimale ϕ_- (bleu) sur une demi surface et sa valeur maximale ϕ_+ (rouge) sur l'autre demi surface. Pour des raisons de symétries, la valeur du potentiel électrostatique à l'origine est nulle, c'est-à-dire $\phi(0, 0) = 0$, comme il se doit.

À présent, on va montrer que la représentation intégrale (2.42) de la fonction holomorphe $f(z)$ permet de faire apparaître une distribution de Dirac comme limite d'un intégrand appelé le noyau de Poisson. Cette représentation intégrale peut être remise en forme comme,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} f(w) \frac{w(z - \frac{1}{\bar{z}})}{(w - z)(w - \frac{1}{\bar{z}})} \frac{dw}{w}. \quad (2.61)$$

Compte tenu de la norme au carré $|z|^2 = z\bar{z}$, la représentation intégrale (2.61) de la fonction $f(z)$ dont la fraction dans l'intégrand est multipliée par \bar{z}/ω au numérateur et au dénominateur devient,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} f(w) \frac{|z|^2 - 1}{(w - z)(\bar{z} - \frac{1}{w})} \frac{dw}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} f(w) \frac{1 - |z|^2}{(w - z)(\frac{1}{w} - \bar{z})} \frac{dw}{w}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Etant donné que le point z se trouve à l'intérieur du cercle unité et que le point w se trouve sur ce cercle, on écrit ces nombres complexes à l'aide de leurs représentations polaires (2.43) et (2.54),

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{et} \quad w = e^{i\alpha} \quad \text{alors} \quad \frac{dw}{w} = i d\alpha. \quad (2.63)$$

Par conséquent, la représentation intégrale (2.62) de $f(z)$ devient,

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \frac{1-r^2}{(e^{i\alpha}-re^{i\theta})(e^{-i\alpha}-re^{-i\theta})} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \frac{1-r^2}{1+r^2-r(e^{i(\theta-\alpha)}+e^{-i(\theta-\alpha)})} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.64)$$

La partie réelle de la représentation intégrale (2.64) donne l'intégrale de Poisson sur le cercle unité,

$$\operatorname{Re} f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)} d\alpha. \quad (2.65)$$

Le noyau de Poisson est défini comme,

$$P_r(\theta-\alpha) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}. \quad (2.66)$$

Ainsi, l'intégrale de Poisson (2.65) devient,

$$\operatorname{Re} f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) P_r(\theta-\alpha) d\alpha. \quad (2.67)$$

Dans la limite où $r \rightarrow 1$, l'intégrale de Poisson (2.67) prend la forme suivante,

$$\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) P_1(\theta-\alpha) d\alpha. \quad (2.68)$$

La définition de la distribution de Dirac $\delta(\theta-\alpha)$ donne lieu à la représentation intégrale suivante,

$$\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) \delta(\theta-\alpha) d\alpha. \quad (2.69)$$

Par comparaison entre les relations (2.68) et (2.69), la distribution de Dirac est la limite lorsque $r \rightarrow 1$ du noyau de Poisson,

$$\delta(\theta-\alpha) = \frac{1}{2\pi} P_1(\theta-\alpha) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}, \quad (2.70)$$

où le facteur 2π est un facteur de normalisation.

2.7 Loi d'Ampère

Dans cette section, on va montrer un résultat assez étonnant : la loi d'Ampère est une conséquence physique du théorème des résidus. Pour ce faire, on considère la circulation du champ magnétique auxiliaire sur un chemin fermé circulaire \mathcal{C} de rayon R orienté dans le sens trigonométrique dans le plan complexe. Le vecteur champ magnétique auxiliaire $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ est tangent au cercle et le vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{s}(\mathbf{r})$ aussi. Ces vecteurs sont des fonctions du vecteur position \mathbf{r} . La circulation du champ magnétique auxiliaire le long du chemin fermé \mathcal{C} s'écrit,

$$\Gamma_H = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \oint_{\mathcal{C}} H(R) ds = \int_0^{2\pi} H(R) R d\theta, \quad (2.71)$$

où $\|\mathbf{r}\| = R$ et $ds = R d\theta$. Afin de déduire la loi d'Ampère du théorème des résidus, on associe le plan de circulation du champ magnétique auxiliaire au plan complexe \mathbb{C} . Tout point de ce plan qui se trouve sur le chemin circulaire fermé \mathcal{C} centré à l'origine a la représentation polaire suivante,

$$z = Re^{i\theta} \quad \text{ainsi} \quad dz = iRe^{i\theta} d\theta \quad \text{et} \quad R d\theta = -ie^{-i\theta} dz. \quad (2.72)$$

Par prolongement analytique, le champ magnétique auxiliaire complexe est défini comme,

$$H(z) = H(R) e^{-i\theta}, \quad (2.73)$$

ce qui implique que,

$$H(R) R d\theta = -i H(z) dz. \quad (2.74)$$

Par conséquent, la circulation du champ magnétique (2.71) est écrite dans le plan complexe comme une intégrale de contour,

$$\Gamma_H = -i \oint_{\mathcal{C}} H(z) dz. \quad (2.75)$$

Si la fonction $H(z)$ est holomorphe, la circulation du champ magnétique auxiliaire Γ_H est nulle. Cela signifie que l'intégrale de contour (2.75) s'annule. Pour que la circulation du champ magnétique soit non nulle, il faut que le champ magnétique auxiliaire complexe $H(z)$ ait des singularités à l'intérieur du contour \mathcal{C} dans le plan complexe. L'origine physique des singularités du champ magnétique auxiliaire ne peut être due qu'au passage des courants électriques à travers le plan complexe. En d'autres termes les pôles simples $z_1, z_2 \dots z_k$ du champ magnétique auxiliaires sont les points d'intersection entre les courants électriques I_k passant à travers la courbe fermée \mathcal{C} et le plan complexe \mathbb{C} qui la contient. Les courants électriques I_k , définis positifs sortants et négatifs entrants, sont donc des multiples des résidus,

$$I_k = 2\pi \operatorname{Res}_{z=z_k} H(z) = 2\pi \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) H(z), \quad (2.76)$$

où 2π est le facteur multiplicateur. Cela montre que le module du champ magnétique complexe $|H(z)|$ décroît comme l'inverse de la distance $|z - z_k|$ par rapport au courant électrique I_k qui le génère. A l'aide du théorème des résidus appliqué au champ magnétique auxiliaire complexe $H(z)$,

$$\oint_{\mathcal{C}} H(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} H(z), \quad (2.77)$$

la circulation de champ magnétique auxiliaire complexe (2.75) se réduit à la somme des courants électriques qui le génèrent,

$$\Gamma_H = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} H(z) = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (2.78)$$

En identifiant les deux expressions (2.71) et (2.78), on obtient la loi d'Ampère,

$$\Gamma_H = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (2.79)$$



André-Marie Ampère

2.8 Identité remarquable

Afin d'établir l'identité remarquable liant les fonctions logarithme et arctangente, on détermine au préalable la dérivée de la fonction arctangente à l'aide de la relation,

$$\arctan(y(x)) = \arctan(\tan x) = x, \quad (2.80)$$

La dérivée de la relation (2.80) par rapport à x s'écrit,

$$\frac{d \arctan(y(x))}{dx} = \frac{d \arctan(y(x))}{dy(x)} \frac{dy(x)}{dx} = 1. \quad (2.81)$$

Compte l'identité (2.80), la relation (2.81) donne la dérivée de l'arctangente,

$$\begin{aligned} \frac{d \arctan(y(x))}{dy(x)} &= \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^{-1} = \left(\frac{d \tan(x)}{dx} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2(x)}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Compte tenu de la décomposition de la fraction en éléments simples,

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+iy} + \frac{1}{1-iy} \right), \quad (2.83)$$

et de la condition au bord $\arctan(0) = 0$, l'intégrale de la relation (2.82) donne l'identité remarquable entre les fonctions arctangente et logarithme,

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} \left(\int_0^x \frac{dy}{1+iy} + \int_0^x \frac{dy}{1-iy} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_0^x \frac{d(iy)}{1+iy} + \int_0^x \frac{d(iy)}{1-iy} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\ln(1+ix) - \ln(1-ix) \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+ix}{1-ix} \right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

3

Fonction gamma

3.1 Introduction

La fonction gamma, notée $\Gamma(z)$, où $z \in \mathbb{C}$, est l'une des fonctions spéciales à argument et valeur complexes les plus importantes en analyse. Cette fonction est l'extension la plus simple de la factorielle aux corps des nombres complexes. Elle est intimement liée à la fonction zêta de Riemann, notée $\zeta(z)$, qui est une extension de la série harmonique, par la relation suivante,

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx \quad \text{où} \quad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (3.1)$$

La fonction zêta de Riemann joue un rôle central en théorie des nombres et a des applications en physique quantique, notamment pour la description de la force de Casimir. L'hypothèse de Riemann qui a trait à la répartition des zéros complexes de la fonction zêta de Riemann, est considérée comme le plus important problème mathématique non résolu. Elle permet de rendre compte de l'occurrence des nombres premiers dans la suite des entiers naturels. Cette hypothèse est la conjecture selon laquelle les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann $\zeta(z)$ sont des nombres complexes dont la partie réelle vaut une demie, c'est-à-dire $x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ (Fig. 3.1).

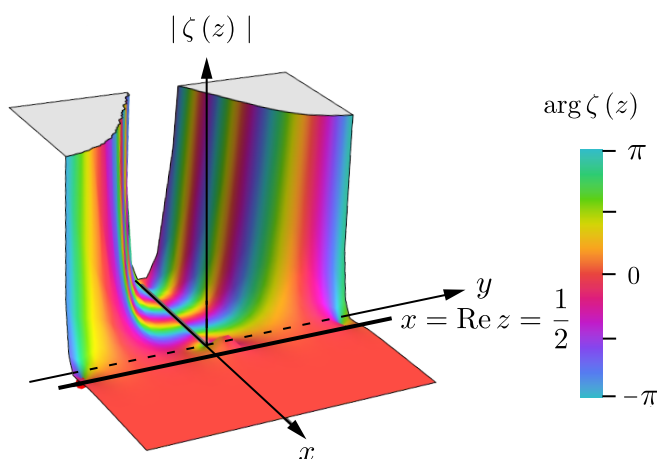
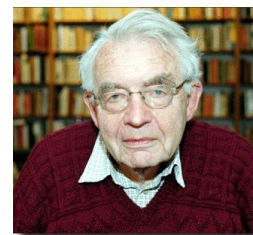


FIGURE 3.1 La forme de la norme de la fonction $\zeta(z) = |\zeta(z)| e^{i \arg \zeta(z)}$ est représentée sur le graphique et son argument est donné par sa couleur. La droite en gras $x = \operatorname{Re} z = 1/2$ contient les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(z)$.

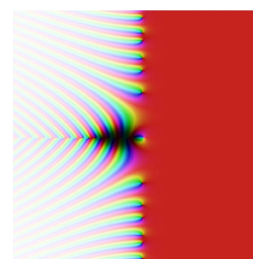
Les propriétés de la fonction $\Gamma(z)$, notamment sa relation $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$, qui permet de généraliser la notion de factorielle $\Gamma(n+1) = n!$, sont établies en sect. 3.2. Les pôles simples de la fonction $\Gamma(z)$ en $z = -n \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}_+^*$ et les résidus correspondants sont déterminés en sect. 3.3. Le développement en produit de la fonction $\Gamma(z)$ qui fait intervenir la constante d'Euler-Mascheroni $\gamma = 0.5772156649$ est établi en sect. 3.4. La formule de Stirling qui donne une approximation de la factorielle $n!$ dans la limite des grands nombres et le logarithme de cette formule sont déterminées en sect. 3.5. Pour ce faire, la fonction gamma $\Gamma(z)$,



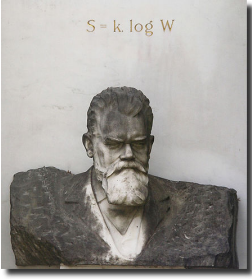
Hendrik Casimir



Bernhard Riemann



Millenium Prize



Tombe de Boltzmann

qui est définie comme l'intégrale d'une maxwellienne, est approximée par l'intégrale d'une gaussienne.

En guise d'application de la formule de Stirling, on montre en sect. 3.6 que lorsque la température tend vers zéro, l'entropie du mélange isotherme de deux gaz parfaits, constitués de N_1 et N_2 molécules respectivement, est le produit de la constante de Boltzmann k_B et du logarithme du nombre Ω de configurations macroscopiques,

$$S = k_B \ln \Omega \quad \text{où} \quad \Omega = \frac{N!}{N_1! N_2!}, \quad (3.2)$$

car l'entropie S est une grandeur additive, le nombre de configuration Ω est une grandeur multiplicative et k_B est le quantum d'entropie. Comme application de la représentation intégrale de la fonction $\Gamma(z)$, la statistique d'un gaz parfait monoatomique à l'équilibre thermique avec un réservoir de chaleur à température T est décrite en sect. 3.7. La densité de probabilité énergétique de Maxwell-Boltzmann $f_E(E)$ est exprimée en termes de la fonction $\Gamma(1/2)$ et la valeur moyenne de l'énergie atomique $\langle E \rangle$ est écrite en termes de la fonction $\Gamma(3/2)$. On en déduit que la température T est une mesure de l'agitation atomique.

3.2 Propriétés

La fonction gamma qui étend la notion de factorielle au corps des nombres réels \mathbb{R} est définie sur ce corps de la manière suivante,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Par inspection graphique (Fig. 3.2),

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

on constate que la fonction $\Gamma(n+1)$ est la fonction factorielle,

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (3.5)$$

La fonction $\Gamma(x)$ peut être généralisée au corps des nombres complexes \mathbb{C} de manière directe,

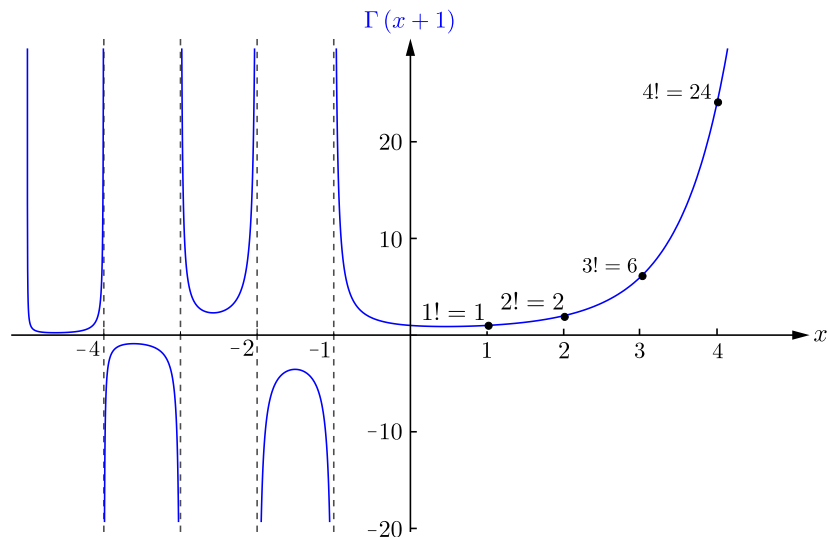


FIGURE 3.2 La fonction $\Gamma(x+1) = x!$ si $x = n \in \mathbb{N}$. Si $x \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}$ alors la fonction $\Gamma(x+1)$ diverge.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où} \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (3.6)$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient une relation de récurrence pour la fonction

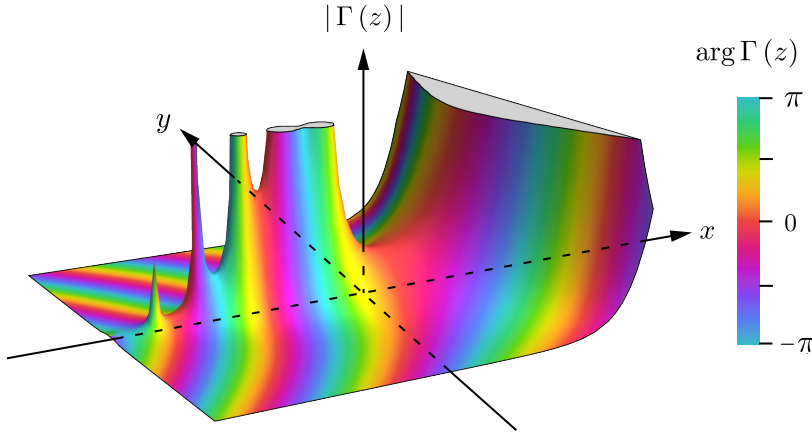


FIGURE 3.3 La forme de la norme de la fonction $\Gamma(z) = |\Gamma(z)| e^{i \arg \Gamma(z)}$ est représentée sur le graphique et son argument est donné par sa couleur.

gamma,

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z). \end{aligned} \quad (3.7)$$

En évaluant la fonction gamma (3.6) en $z = 1$, on trouve,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1. \quad (3.8)$$

Par conséquent, compte tenu de la valeur particulière (3.8), on établit explicitement l'équivalence entre la fonction gamma et la factorielle par récurrence (3.7),

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n! \Gamma(1) = n!. \quad (3.9)$$

En particulier lorsque $n = 1$, on en conclut (Fig. 3.2),

$$0! = \Gamma(1) = 1. \quad (3.10)$$

Pour un nombre complexe $z \notin \mathbb{Z}$, la fonction gamma satisfait la formule des compléments d'Euler,

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (3.11)$$

dont la démonstration assez ardue est faite en exercice. Cette formule évaluée en $z = 1/2$ s'écrit,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \quad \text{ainsi} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.12)$$

3.3 Pôles et résidus

Afin d'évaluer le domaine d'analyticité de la fonction gamma, on se base sur la relation de récurrence (3.7) qui peut être remise en forme comme,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}. \quad (3.13)$$

Par conséquent, la fonction $\Gamma(z+n+1)$ est analytique si $\text{Re}(z) > -(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Compte tenu de la relation de récurrence (3.13), on en déduit que les pôles simples de la fonction gamma sont les entiers négatifs,

$$z \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}. \quad (3.14)$$

Ainsi, le domaine de convergence de la fonction gamma est le suivant : \mathbb{C}/\mathbb{Z}_- . A l'aide de la valeur particulière (3.8) et de la relation de récurrence (3.13), on détermine les pôles de la fonction gamma en $z = -n$,

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\dots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (3.15)$$

Par conséquent, la somme des résidus de la fonction gamma s'écrit,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad (3.16)$$

3.4 Développement en produit

Afin d'obtenir un développement en produit de la fonction gamma (3.6), on l'exprime d'abord de la manière suivante,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \quad (3.17)$$

où la limite et la somme commutent par convergence uniforme. A l'aide du changement de variable,

$$u = \frac{t}{n} \quad \text{ainsi} \quad du = \frac{dt}{n}, \quad (3.18)$$

l'expression intégrale de la fonction gamma devient,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du. \quad (3.19)$$

A l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du &= \frac{u^z (1-u)^n}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \\ &= \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du, \end{aligned} \quad (3.20)$$

itérée n fois, on obtient le résultat suivant,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du &= \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\ &= \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n)} u^{z+n} \Big|_0^1, \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Au vu du résultat de l'intégrale (3.21), la fonction gamma (3.19) devient,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} n^z \quad (3.22)$$

Afin d'obtenir un développement en produit de la fonction gamma, cette fonction (3.22) peut être remise en forme comme,

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)} e^{z \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)}}{z} \frac{e^z e^{\frac{z}{2}} \dots e^{\frac{z}{n}}}{(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Compte tenu de la constante d'Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \simeq 0.5772156649, \quad (3.24)$$



Leonhard Euler

la fonction gamma (3.23) admet le développement en produit suivant,

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}. \quad (3.25)$$



Lorenzo Mascheroni

3.5 Formule de Stirling

La formule de Stirling est une approximation valable dans la limite des grands nombres qui fait intervenir la fonction gamma. En réalité, cette formule est l'approximation d'une factorielle dans cette limite. Compte tenu du lien (3.5) entre la factorielle et la fonction gamma et de la représentation intégrale (3.4) de la fonction gamma,

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{n \ln t - t} dt = \int_0^{\infty} f(t) dt, \quad (3.26)$$

où la fonction $f(t)$ est,

$$f(t) = e^{n \ln t - t} = t^n e^{-t}. \quad (3.27)$$

Il est utile de faire une étude de la fonction $f(t)$ afin de pouvoir l'approximer par une gaussienne. La dérivée de cette fonction, évaluée à sa valeur extrême t^* , s'annule,

$$f'(t^*) = \left(\frac{n}{t^*} - 1\right) e^{n \ln t^* - t^*} = 0 \quad \text{ainsi} \quad t^* = n. \quad (3.28)$$

Par conséquent, la valeur extrême de cette fonction est,

$$f(t^*) = e^{n \ln t^* - t^*} = e^{n \ln n - n} = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (3.29)$$

Cette fonction est concave autour de sa valeur extrême t^* car sa dérivée seconde est négative,

$$f''(t^*) = \left(-\frac{n}{t^{*2}} + \left(\frac{n}{t^*} - 1\right)^2\right) f(t^*) = -\frac{1}{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < 0, \quad (3.30)$$

ce qui signifie qu'elle a un maximum. Dans la limite où $t \rightarrow 0$, la fonction s'annule,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^n e^{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+n}}{k!} = 0, \quad (3.31)$$

et dans la limite où $t \rightarrow \infty$, elle est également nulle,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-n} e^t)^{-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-n}}{k!}\right)^{-1} = 0. \quad (3.32)$$

La fonction $f(t)$ est une maxwellienne (Fig. 3.4) qui peut en première approximation être considérée comme une gaussienne asymétrique déformée autour de son maximum. Afin de

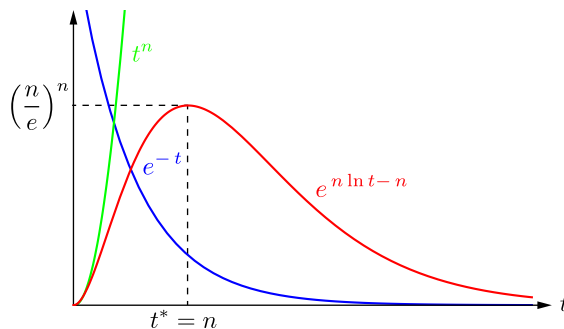


FIGURE 3.4 La fonction $f(t) = e^{n \ln t - t}$ (rouge) est le produit de la fonction t^n (vert) et de la fonction e^{-t} (bleu).

l'exprimer comme une gaussienne déformée, on se base sur la largeur caractéristique d'une gaussienne donnée par son écart-type,

$$\sigma \simeq \sqrt{n}. \quad (3.33)$$

On fait alors le changement de variable suivant,

$$t = t^* + \sigma s = n + \sqrt{n} s, \quad (3.34)$$

dont l'inverse s'écrit,

$$s = \frac{t - n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad dt = \sqrt{n} ds, \quad (3.35)$$

où la variable s décrit le comportement de la fonction $f(t)$ autour de son maximum en $t = t^*$. Compte tenu du changement de variable inverse (3.34) et de sa différentielle, la représentation intégrale d'une factorielle (3.26) devient,

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n - \sqrt{n} s + n \ln(n + \sqrt{n} s)} ds \\ &= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n} e^{-n \frac{s}{\sqrt{n}}} e^{n \ln\left(n\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)} ds. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Grâce à l'identité logarithmique,

$$e^{n \ln\left(n\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{n \ln n} e^{n \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)}, \quad (3.37)$$

la représentation intégrale (3.36) devient,

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{n \ln n - n} e^{-n\left(\frac{s}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)} ds \\ &= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-n\left(\frac{s}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)} ds. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A l'aide du développement en série de puissances du logarithme,

$$\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k, \quad (3.39)$$

la représentation intégrale (3.38) devient,

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\left(\frac{s}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right)} ds. \quad (3.40)$$

En sortant les deux premiers termes de la série dans l'argument de l'exponentielle (3.40), le premier compense le terme précédent et le deuxième fait apparaître une gaussienne déformée dans l'intégrant,

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 - n \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right) ds \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \exp\left(-n \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right) ds \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \prod_{k=3}^{\infty} \exp\left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right) ds. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A l'aide du développement en série de puissances de l'exponentielle,

$$\exp\left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right)^j, \quad (3.42)$$

la représentation intégrale (3.41) devient,

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \prod_{k=3}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right)^j ds. \quad (3.43)$$

Etant donné qu'une maxwellienne est une déformation d'une gaussienne, c'est-à-dire $s \ll 1$, on peut effectuer un développement limité par rapport à s . Ainsi, les deux premiers termes de la série, où $j = 0, 1$ s'écrivent,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^k \right)^j = 1 - \frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^k + \mathcal{O}(s^{2k}) \quad (3.44)$$

Dans la limite où $s \ll 1$, le développement limité au cinquième ordre en s du produit de la série, où $k = 3, 4, 5$, s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \prod_{k=3}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^k \right)^j &= \prod_{k=3}^5 \left(1 - \frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^k + \mathcal{O}(s^{2k}) \right) \\ &= \left(1 - \frac{n}{3} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^3 + \mathcal{O}(s^6) \right) \left(1 - \frac{n}{4} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^4 + \mathcal{O}(s^8) \right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{n}{5} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^5 + \mathcal{O}(s^{10}) \right) \\ &= 1 + \frac{s^3}{3n^{1/2}} - \frac{s^4}{4n} + \frac{s^5}{5n^{3/2}} + \mathcal{O}(s^6), \end{aligned} \quad (3.45)$$

et la représentation intégrale (3.43) devient,

$$n! \simeq \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \left(1 + \frac{s^3}{3n^{1/2}} - \frac{s^4}{4n} + \frac{s^5}{5n^{3/2}} + \mathcal{O}(s^6) \right) ds. \quad (3.46)$$

A l'aide du changement de variables,

$$t = -\frac{s^2}{2} \quad \text{ainsi} \quad dt = -s ds \quad \text{et} \quad ds = -\frac{dt}{s} = -\frac{dt}{\sqrt{2t}}, \quad (3.47)$$

et de la fonction réelle (3.3), l'intégrale symétrique d'une gaussienne vaut,

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Compte tenu de l'intégrale d'une gaussienne (3.48), dans la limite des grands nombres n , la représentation intégrale de la factorielle (3.46) est écrite comme la somme d'un terme dominant et d'un ensemble de termes correctifs,

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \left(\frac{s^3}{3n^{1/2}} - \frac{s^4}{4n} + \frac{s^5}{5n^{3/2}} + \mathcal{O}(s^6) \right) ds \right), \quad (3.49)$$

La résolution de l'intégrale (3.49) fait apparaître une série de termes correctifs explicites appelée la série de Stirling,

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + \mathcal{O}(n^{-4}) \right). \quad (3.50)$$

La série asymptotique de Stirling est formellement définie comme,

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^k}, \quad (3.51)$$

où les coefficients a_k sont exprimés en termes des coefficients impaires b_{2k+1} ,

$$a_k = (2k+1)!! b_{2k+1}, \quad (3.52)$$

qui satisfont la relation de récurrence,

$$b_k = \frac{1}{k+1} \left(b_{k+1} - \sum_{j=2}^{k-1} j b_j b_{k+1-j} \right). \quad (3.53)$$

Dans la limite des grands nombres n , la série de Stirling tend vers 1,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \simeq 1. \quad (3.54)$$

Dans cette limite, on obtient alors la formule de Stirling,

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (3.55)$$

Le logarithme de la formule de Stirling (3.55) s'écrit,

$$\ln n! \simeq \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n + \ln (2\pi n)^{1/2} = \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln (2\pi). \quad (3.56)$$

Compte tenu de l'identité logarithmique,

$$\ln \left(\frac{n}{e}\right)^n = n \ln n - n \ln e = n \ln n - n, \quad (3.57)$$

le logarithme de la formule de Stirling (3.56) devient,

$$\ln n! \simeq n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln (2\pi). \quad (3.58)$$

Les deux termes sont proportionnels à n alors que le troisième terme est proportionnel au $\ln n$ et le dernier terme est constant. Par conséquent, dans la limite des grands nombres n , les deux derniers termes sont négligeables et ainsi le logarithme de la formule de Stirling (3.58) se réduit à,

$$\ln n! \simeq n \ln n - n. \quad (3.59)$$

Compte tenu de l'identité des fonctions gamma (3.5), la généralisation du logarithme de la formule de Stirling au corps des réels s'écrit,

$$\ln (\Gamma(x+1)) \simeq x \ln x - x. \quad (3.60)$$

Graphiquement, on constate que la différence entre les fonctions $\ln (\Gamma(x+1))$ et $x \ln x - x$ est négligeable pour des valeurs de $x > 10^2$ (Fig. 3.5). Par conséquent, à l'échelle macroscopique du laboratoire pour un nombre de molécules qui est de l'ordre de grandeur du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,022 \cdot 10^{23}$, les fonctions $\ln (\Gamma(x+1))$ et $x \ln x - x$ peuvent raisonnablement être considérées comme égales.

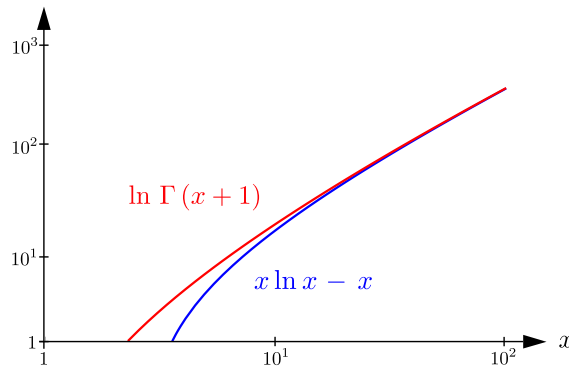


FIGURE 3.5 Graphique log-log des fonctions $\ln (\Gamma(x+1))$ et $x \ln x - x$.

3.6 Entropie de mélange

Comme application de la formule de Stirling, on considère le mélange isotherme de deux gaz parfaits. Le système isolé est constitué de deux gaz parfaits composés de deux types de molécules distinctes, qui sont initialement dans deux compartiments séparés par une paroi imperméable diatherme et mobile. Dans l'état initial i , le premier compartiment de

volume V_1 contient N_1 molécules du gaz parfait 1 et le deuxième compartiment de volume V_2 contient N_2 molécules du gaz parfait 2. Les gaz sont à l'équilibre thermique à température T et à l'équilibre mécanique à pression p . Ensuite, la paroi est brisée et les $N = N_1 + N_2$ molécules des deux gaz parfaits diffusent dans l'ensemble du système de volume $V = V_1 + V_2$. Le système tend alors vers un état d'équilibre final f constitué d'un mélange homogène des deux gaz. Pour un mélange isotherme, la variation d'entropie est la somme de la variation d'entropie de chaque gaz durant la diffusion de l'état initial i , où les gaz parfaits 1 et 2 sont séparés, à l'état final f , où ils sont entièrement mélangés (Fig. 3.6), s'écrit,

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \Delta S_{1,i \rightarrow f} + \Delta S_{2,i \rightarrow f} = N_1 k_B \ln \left(\frac{V}{V_1} \right) + N_2 k_B \ln \left(\frac{V}{V_2} \right) > 0. \quad (3.61)$$

Compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait, les volumes initiaux des deux sous-systèmes

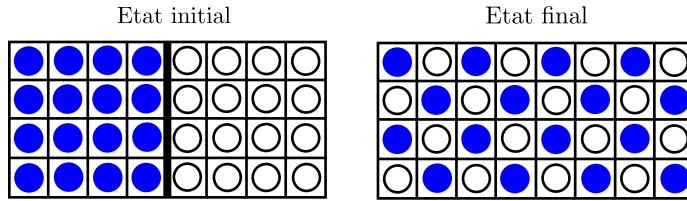


FIGURE 3.6 Mélange de 16 molécules d'un gaz parfait 1 représentées par des boules bleues et de 16 molécules d'un gaz parfait 2 représentées par des boules blanches, initialement séparées par une paroi.

s'écrivent,

$$V_1 = \frac{N_1 k_B T}{p} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{N_2 k_B T}{p} \quad (3.62)$$

et le volume final du système est la somme des volumes initiaux,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{(N_1 + N_2) k_B T}{p} = \frac{N k_B T}{p}. \quad (3.63)$$

Compte tenu des volumes (3.62) et (3.63), l'entropie de mélange (3.64) devient,

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = -N k_B \left(\frac{N_1}{N} \ln \left(\frac{N_1}{N} \right) + \frac{N_2}{N} \ln \left(\frac{N_2}{N} \right) \right) > 0. \quad (3.64)$$

Par extensivité de l'entropie, l'entropie du système $S(T, p, N_1, N_2)$ après la diffusion est la somme des entropies des deux sous-systèmes $S_1(T, p, N_1)$ et $S_2(T, p, N_2)$ avant le mélange et de l'entropie de mélange $\Delta S_{i \rightarrow f}(N_1, N_2)$,

$$S(T, p, N_1, N_2) = S_1(T, p, N_1) + S_2(T, p, N_2) + \Delta S_{i \rightarrow f}(N_1, N_2). \quad (3.65)$$

D'après le troisième principe, l'entropie des deux sous-systèmes, constitués de gaz parfaits purs avant le mélange, devient nulle lorsque la température tend vers le zéro absolu,

$$\lim_{T \rightarrow 0} S_1(T, p, N_1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow 0} S_2(T, p, N_2) = 0. \quad (3.66)$$

Ainsi, lorsque la température T tend vers zéro, l'entropie du système se réduit à l'entropie de mélange,

$$S(N_1, N_2) = \lim_{T \rightarrow 0} S(T, p, N_1, N_2) = \Delta S_{i \rightarrow f}(N_1, N_2). \quad (3.67)$$

Lorsqu'on fait tendre la température d'un mélange de gaz parfaits vers zéro, sa pression tend également vers zéro compte tenu de l'équation d'état d'un gaz parfait,

$$pV = Nk_B T. \quad (3.68)$$

Dans cette limite, l'entropie $S(N_1, N_2)$ est uniquement une fonction des nombres de molécules N_1 et N_2 de gaz parfaits 1 et 2. En substituant l'entropie de mélange (3.64) dans l'entropie (3.67), on obtient,

$$S(N_1, N_2) = -N k_B \left(\frac{N_1}{N} \ln \left(\frac{N_1}{N} \right) + \frac{N_2}{N} \ln \left(\frac{N_2}{N} \right) \right). \quad (3.69)$$

Physiquement, l'expression de l'entropie (3.69) se réduit à l'entropie de mélange puisqu'on néglige l'entropie due à l'agitation atomique en faisant tendre la température vers zéro. L'entropie (3.69) peut être développée comme suit,

$$\begin{aligned} S(N_1, N_2) &= k_B (N_1 \ln N + N_2 \ln N - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2) \\ &= k_B (N \ln N - N - N_1 \ln N_1 + N_1 - N_2 \ln N_2 + N_2), \end{aligned} \quad (3.70)$$

où $N = N_1 + N_2$. Compte tenu du logarithme de la formule de Stirling (3.59) dans la limite des grands nombres, l'entropie (3.69) devient,

$$S(N_1, N_2) = k_B (\ln N! - \ln N_1! - \ln N_2!), \quad (3.71)$$

et elle est remise en forme comme,

$$S(N_1, N_2) = k_B \ln \Omega = k_B \ln \left(\frac{N!}{N_1! N_2!} \right). \quad (3.72)$$

L'argument du logarithme de l'entropie (3.72) correspond au nombre Ω de configurations macroscopiques qui est le nombre de combinaisons de N_1 molécules parmi N où les N_1 molécules de gaz 1 et les N_2 molécules de gaz 2 sont séparément indiscernables entre elles à l'échelle macroscopique. Cette approche conduit donc naturellement à une interprétation statistique de la notion d'entropie découverte par Boltzmann.



Ludwig Boltzmann

3.7 Thermodynamique statistique

À l'échelle microscopique, un gaz parfait monoatomique à l'équilibre thermique avec un réservoir de chaleur à température T peut être modélisé comme un ensemble d'atomes libres considérés comme des points matériels effectuant des collisions élastiques. L'énergie cinétique des atomes change en permanence en fonction des collisions. D'abord, on suppose que leur énergie cinétique ne peut prendre que des valeurs discrètes. Il ne faut pas y voir plus qu'une commodité de calcul. L'extension au continu est immédiate.

Étant donné que les atomes sont libres au sein d'un gaz parfait, il n'y a pas d'énergie potentielle d'interaction entre eux. Par conséquent, l'énergie atomique moyenne $\langle E \rangle$ d'un gaz parfait monoatomique, constitué de N atomes de masse identique m à l'équilibre thermique avec un réservoir de chaleur de température T , est la somme sur les n niveaux d'énergie cinétique de la proportion d'atomes N_i/N d'énergie cinétique E_i multiplié par cette énergie cinétique,

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} E_i, \quad (3.73)$$

où la probabilité qu'un atome ait une énergie cinétique E_i s'écrit,

$$p(E_i) = \frac{N_i}{N}. \quad (3.74)$$

Ainsi, l'énergie atomique moyenne peut être mise sous la forme suivante,

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^n E_i p(E_i). \quad (3.75)$$

Dans la limite du continu, la somme (3.75) est remplacée par une intégrale et la probabilité $p(E_i)$ qu'un atome ait une énergie E_i est remplacée par la probabilité $f_E(E) dE$ que cet atome ait une énergie dans l'intervalle infinitésimal $[E, E + dE]$,

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E f_E(E) dE. \quad (3.76)$$

La densité de probabilité énergétique $f_E(E)$ de Maxwell-Boltzmann, déduite de l'ensemble canonique, est une maxwellienne de la forme,

$$f_E(E) = \frac{2\pi}{(\pi k_B T)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right), \quad (3.77)$$



James Clerk Maxwell

qui peut être exprimée en termes du coefficient β ,

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (3.78)$$

comme,

$$f_E(E) = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} (\beta E)^{1/2} e^{-\beta E}. \quad (3.79)$$

A l'aide de la variable sans dimension,

$$z = \beta E, \quad (3.80)$$

la probabilité qu'un atome ait une énergie dans l'intervalle infinitésimal $[E, E + dE]$ peut alors être écrite comme (Fig. 3.7),

$$f_E(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\beta E)^{1/2} e^{-\beta E} d(\beta E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{1/2} e^{-z} dz. \quad (3.81)$$

Par conséquent, compte tenu de la fonction gamma (3.6), de sa valeur (3.12) évaluée en

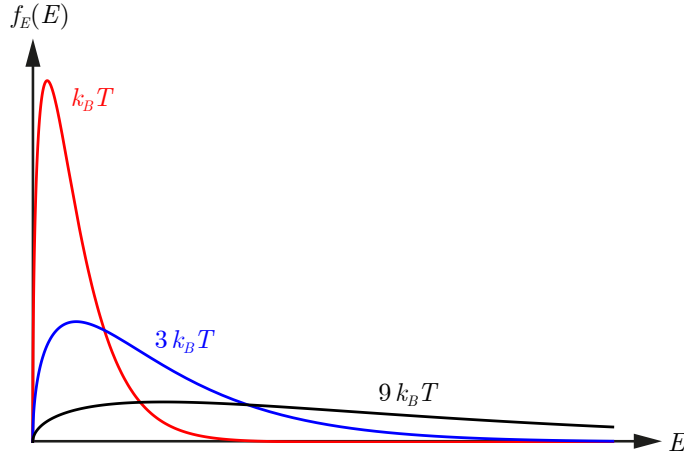


FIGURE 3.7 Maxelliennes représentant les densités de probabilités énergétiques $f_E(E)$ pour trois températures fixées.

$z = 1/2$ et de la relation de récurrence (3.7) pour cette fonction, on obtient la condition de normalisation des probabilités,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_E(E) dE &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} z^{1/2} e^{-z} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \end{aligned} \quad (3.82)$$

comme il se doit. A l'aide de la variable sans dimension (3.80), de la probabilité (3.81) et de la variable (3.78), on obtient le résultat suivant,

$$E f_E(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\beta} z^{3/2} e^{-z} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_B T z^{3/2} e^{-z} dz. \quad (3.83)$$

Par conséquent, l'énergie atomique moyenne s'écrit,

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_0^{\infty} E f_E(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_B T \int_0^{\infty} z^{3/2} e^{-z} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_B T \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_B T \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} k_B T. \end{aligned} \quad (3.84)$$

D'autre part, l'énergie atomique moyenne est par définition de la forme suivante,

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle. \quad (3.85)$$

En comparant les expressions (3.84) et (3.85) de l'énergie atomique moyenne, on en conclut que,

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (3.86)$$

L'énergie atomique moyenne (3.86) n'est valable que pour un gaz monoatomique avec trois degrés de liberté microscopiques qui sont les composantes cartésiennes v_x , v_y et v_z de la vitesse des atomes. Cette relation est capitale sur le plan conceptuel puisqu'elle montre que la température T d'un gaz parfait monoatomique est une mesure de l'agitation atomique qui est mesurée par la vitesse quadratique moyenne $\langle v^2 \rangle$.

4

Calcul variationnel

4.1 Introduction

Le seul principe universel en physique qui permette d'établir aussi bien les équations de champs d'Einstein de la relativité générale que l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique ou encore les équations de Maxwell de l'électromagnétisme est le principe de moindre action. Ce principe est obtenu à l'aide du calcul variationnel découvert par Euler et appliqué à l'étude de la mécanique par Lagrange.

Le calcul variationnel consiste à minimiser la fonctionnelle action qui a une dimension physique de moment cinétique. L'action S est définie comme l'intégrale temporelle de la fonctionnelle lagrangien L qui a une dimension physique d'énergie. Dans la sect.??, on étudie la dynamique d'un point matériel décrite par une seule coordonnée de position généralisée $q(t)$. Le lagrangien $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ est une fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction des fonctions position généralisée $q(t)$ et vitesse généralisée $\dot{q}(t)$ ainsi que de la variable temps t . En minimisant l'action $S[q]$ obtenue en intégrant le lagrangien par rapport au temps, on obtient alors les équations d'Euler-Lagrange décrivant la dynamique du point matériel.

La transformation bijective de Legendre du lagrangien $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ par rapport à la vitesse généralisée donne l'hamiltonien $H(q(t), p(t), t)$ qui est une fonction de la quantité de mouvement généralisée et a une dimension d'énergie, comme le lagrangien. Si le lagrangien est indépendant du temps, alors l'hamiltonien est la constante de Beltrami du mouvement comme montrée en sect.4.3.

Afin d'obtenir les équations de champs d'Euler-Lagrange, on remplace la position généralisée $q(t)$ par les champs scalaires $\phi_\mu(\mathbf{r}, t)$ où $\mu = 0, 1, 2, 3$ en sect. 4.4. L'action $S[\phi_\mu]$ est alors une fonctionnelle de ces champs obtenue en intégrant la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu)$ par rapport à l'espace et au temps. Les équations de champs d'Euler-Lagrange décrivant l'évolution spatio-temporelle de ces champs est obtenue en minimisant l'action par calcul variationnel.

Comme application des équations d'Euler-Lagrange pour un point matériel, on montre en sect. 4.2 que la trajectoire qui minimise le temps de parcours d'un point matériel entre un état initial et un état final fixés est une courbe brachistochrone. On le compare au temps de parcours pour un mouvement rectiligne. En guise d'application essentielle des équations de champs d'Euler-Lagrange, on établit les équations de Maxwell en minimisant l'action électromagnétique $S[\phi, \mathbf{A}]$ en sect. 4.6.

4.2 Equation d'Euler-Lagrange

Pour un point matériel dont le mouvement décrit par un seul degré de liberté, l'action $S[q]$ est une fonctionnelle de la coordonnée de position généralisée q . Elle est définie comme l'intégrale temporelle du lagrangien $L(q(t), \dot{q}(t), t)$, qui une fonction de la coordonnée généralisée $q(t)$, de la vitesse généralisée $\dot{q}(t)$ et du temps t ,

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad \text{où} \quad t \in [t_i, t_f]. \quad (4.1)$$



Leonhard Euler

Les équations d'Euler-Lagrange qui décrivent la dynamique d'un point matériel sont obtenues en minimisant de l'action $S[q]$. La variation infinitésimale de l'action entre q et $q + dq$ définie comme,

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q], \quad (4.2)$$

s'écrit explicitement,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (4.3)$$

où la variation infinitésimale du lagrangien est,

$$\delta L(q(t), \dot{q}(t)) = L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t). \quad (4.4)$$

La variation de l'action (4.3) est exprimée en termes des variations infinitésimales de la coordonnée généralisée $\delta q(t)$ et de la vitesse généralisée $\delta \dot{q}(t)$,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt, \quad (4.5)$$

où la dépendance temporelle est devenue implicite afin d'alléger l'écriture. Les variations infinitésimales de la coordonnée généralisée $\delta q(t)$ ou de la vitesse généralisée $\delta \dot{q}(t)$ peuvent être écrites comme le produit d'une fonction $\eta(t)$ ou de sa dérivée temporelle $\dot{\eta}(t)$ et de la variation infinitésimale d'un paramètre $d\varepsilon$,

$$\delta q(t) = \frac{\delta q(t)}{d\varepsilon} d\varepsilon = \eta(t) d\varepsilon \quad \text{et} \quad \delta \dot{q}(t) = \frac{\delta \dot{q}(t)}{d\varepsilon} d\varepsilon = \dot{\eta}(t) d\varepsilon. \quad (4.6)$$

On fait varier l'action en maintenant fixes la coordonnée généralisée $q(t)$ et la vitesse généralisée $\dot{q}(t)$ au temps initial t_i et final t_f ,

$$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0 \quad \text{et} \quad \delta \dot{q}(t_i) = \delta \dot{q}(t_f) = 0, \quad (4.7)$$

ce qui implique que la fonction $\eta(t)$ et sa dérivée temporelle $\dot{\eta}(t)$ satisfont les conditions aux bords,

$$\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\eta}(t_i) = \dot{\eta}(t_f) = 0. \quad (4.8)$$

Compte tenu des variations de la position généralisée et de la vitesse généralisée (4.6), la variation de l'action (4.5) peut être exprimée en termes de la fonction $\eta(t)$ et de sa dérivée temporelle $\dot{\eta}(t)$,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\delta q}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\delta \dot{q}}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon dt = d\varepsilon \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt, \quad (4.9)$$

où la dépendance temporelle est implicite afin d'alléger l'écriture. L'intégration par parties du deuxième terme du membre de droite de la variation de l'action (4.9) s'écrit,

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt. \quad (4.10)$$

Compte tenu des conditions aux bords (4.8), le terme de bord dans le membre de droite de l'intégrale par parties (4.10) s'annule,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t) \eta(t) \Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t_f) \eta(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t_i) \eta(t_i) = 0. \quad (4.11)$$

Ainsi, l'intégrale par parties (4.10) se réduit,

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt = - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt, \quad (4.12)$$

et la variation de l'action (4.9) est remise en forme comme,

$$\delta S = d\varepsilon \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \eta dt. \quad (4.13)$$

Compte tenu de variation de la coordonnée généralisée (4.6), l'action $S[q]$ est minimale lorsque sa variation (4.13) est nulle,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (4.14)$$

Pour que l'action $S[q]$ soit minimale en tout temps $t \in [t_i, t_f]$ quelle que soit la variation de la coordonnée généralisée δq , il faut que l'intégrant (4.14) s'annule, ce qui donne l'équation d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (4.15)$$

qui décrit le mouvement du point matériel. Parmi toutes les trajectoires possibles d'un point matériel d'un état initial à un état final donnés, celle qui se réalise en pratique est celle qui minimise son action $S[q]$ en tout temps t . C'est la raison pour laquelle on appelle cette approche variationnelle le principe de moindre action.

4.3 Constante du mouvement de Beltrami

Pour un point matériel dont le mouvement décrit par une seule coordonnée position généralisée, l'hamiltonien est défini comme l'opposé de la transformation de Legendre du lagrangien par rapport à la vitesse généralisée \dot{q} ,

$$H(q, p, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L(q, \dot{q}, t), \quad (4.16)$$

où la conjugaison entre la vitesse généralisée \dot{q} et la quantité de mouvement généralisée p s'écrit,

$$p(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \quad \text{et} \quad \dot{q}(p, t) = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p}. \quad (4.17)$$

Compte tenu de la transformation de Legendre (4.16) et des équations d'Euler-Lagrange (4.15), la dérivée temporelle totale de l'hamiltonien s'écrit,

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ainsi, pour un système qui est invariant par évolution temporelle,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (4.19)$$

l'hamiltonien est la constante de Beltrami du mouvement,

$$H = \text{cste}. \quad (4.20)$$

4.4 Equations de champs d'Euler-Lagrange

Afin d'obtenir les équations de champs d'Euler-Lagrange, on généralise l'approche suivie en sect. 4.2 pour un point matériel. Concrètement, on remplace la coordonnée généralisée $q(t)$ qui dépend uniquement du temps t par un ensemble de champs scalaires $\phi_\mu(\mathbf{r}, t)$ qui dépendent de la position \mathbf{r} et du temps t . L'action $S[\phi_\mu]$ est une fonctionnelle des champs ϕ_μ . Elle est définie comme l'intégrale spatio-temporelle de la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu)$, qui est une fonction des champs ϕ_μ , de leurs dérivées temporelles $\dot{\phi}_\mu$ et de leurs dérivées spatiales $\partial_i \phi_\mu$,

$$S[\phi_\mu] = \int dt \iiint d^3r \mathcal{L}(\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu), \quad (4.21)$$



Joseph-Louis
Lagrange



Eugenio Beltrami

où $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $i = 1, 2, 3$. Les champs ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 peuvent par exemple correspondre aux composantes cartésiennes d'un champ vectoriel comme le vecteur potentiel magnétostatique $\mathbf{A} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ et le champ ϕ_0 à champ scalaire comme le potentiel électrostatique $\phi = \phi_0$.

Les équations de champs d'Euler-Lagrange qui décrivent l'évolution spatio-temporelle d'un ensemble de champs sont obtenues en minimisant de l'action $S[\phi_\mu]$. La variation infinitésimale de l'action entre ϕ_μ et $\phi_\mu + d\phi_\mu$ définie comme,

$$\delta S = S[\phi_\mu + \delta\phi_\mu] - S[\phi_\mu], \quad (4.22)$$

s'écrit explicitement,

$$\delta S = \int dt \iiint d^3r \delta \mathcal{L}(\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu), \quad (4.23)$$

où la variation infinitésimale de la densité lagrangienne est,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu) = \\ \mathcal{L}(\phi_\mu + \delta\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu + \delta\dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu + \delta(\partial_i \phi_\mu)) - \mathcal{L}(\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu). \end{aligned} \quad (4.24)$$

La variation de l'action (4.23) est exprimée en termes des variations infinitésimales de la coordonnée généralisée $\delta q(t)$ et de la vitesse généralisée $\delta \dot{q}(t)$,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \iiint d^3r \mathcal{L}(\phi_\mu, \dot{\phi}_\mu, \partial_i \phi_\mu) \\ &= \int dt \iiint d^3r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta\phi_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\mu} \delta\dot{\phi}_\mu + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_\mu)} \partial_i (\delta\phi_\mu) \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

A l'aide d'une intégration par parties par rapport au temps et aux coordonnées spatiales, la variation de l'action (4.25) devient,

$$\begin{aligned} \delta S &= \iiint d^3r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\mu} \delta\phi_\mu \Big|_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty} + \int dt \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_\mu)} \delta\phi_\mu \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &+ \int dt \iiint d^3r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\mu} \right) - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_\mu)} \right) \right) \delta\phi_\mu. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Compte tenu des conditions au bord de Dirichlet,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \delta\phi_\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta\phi_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \delta\phi_\mu = 0, \quad (4.27)$$

qui rendent compte du fait que l'état initial et l'état final des champs ϕ_μ sont fixés, les deux premiers termes de la variation de l'action (4.26), qui sont des termes de bord, s'annulent,

$$\iiint d^3r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\mu} \delta\phi_\mu \Big|_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \int dt \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_\mu)} \delta\phi_\mu \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 0. \quad (4.28)$$

Par conséquent, compte tenu de la variation de l'action (4.26) et des conditions aux bords (4.28), le minimum de l'action (4.26) s'écrit,

$$\delta S = \int dt \iiint d^3r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\mu} \right) - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_\mu)} \right) \right) \delta\phi_\mu = 0. \quad (4.29)$$

Pour que l'action $S[\phi_\mu]$ soit minimale en tout temps t en tout point \mathbf{r} quelle que soit la variation du champ $\delta\phi_\mu$, il faut que l'intégrand (4.29) s'annule, ce qui donne les équations de champs d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\mu} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} = 0, \quad (4.30)$$

qui décrivent l'évolution spatio-temporelle des champs ϕ_μ . Parmi toutes les évolutions d'un état initial à un état final donnés, celle qui se réalise en pratique est celle qui minimise l'action $S[\phi_\mu]$ en tout temps t en tout point \mathbf{r} .

4.5 Brachistochrone

Comme application des équations d'Euler-Lagrange (4.15), on étudie la courbe brachistochrone qui minimise le temps de parcours d'un point matériel entre une position initiale et une position finale données lorsque le point matériel est lâché sans vitesse initiale. L'étymologie de cette courbe vient du fait qu'en grec "brakistos" signifie le "plus court" et "chronos" est le "temps". A priori, on pourrait penser que la droite est le chemin entre deux points qui minimise le temps de parcours. Cela peut sembler intuitif en absence d'accélération. En revanche, compte tenu de l'accélération due au champ gravitationnel, la trajectoire qui minimise le temps de parcours est plus compliquée. En titre d'exemple, on peut se référer à une trajectoire balistique parabolique. Si on lâche simultanément trois billes sans vitesse initiale du même point le long de trois trajectoires différentes : une droite, une rampe avec une pente initiale raide et une pente finale douce et une courbe brachistochrone, la dernière arrive en premier et la première en dernier en position finale (Fig. 4.1).

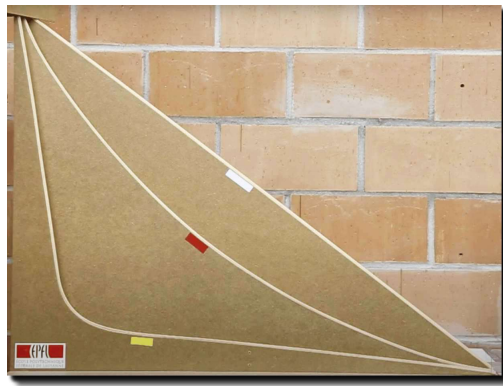


FIGURE 4.1 Les trois billes sont lâchées initialement du même point (en haut à gauche). La bille rouge (brachistochrone) gagne, la bille jaune (rampe) est deuxième et la bille blanche (droite) perd.

On peut aussi imaginer quatre courbes régulières entre deux points à des hauteurs différentes : une ligne, une parabole, une cycloïde et un arc de cercle. On va montrer que la courbe qui minimise le temps de parcours du point initial 1 au point final 2 est la cycloïde (Fig. 4.2).

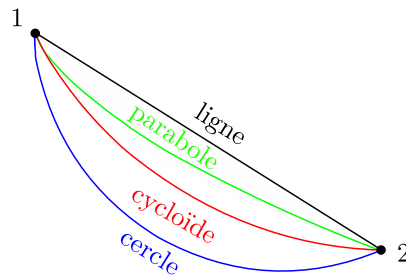


FIGURE 4.2 Un point matériel se déplace selon trois trajectoires régulières du point 1 au point 2 : une ligne (noir), une parabole (vert), une cycloïde (rouge), un cercle (bleu).

Le temps de parcours $T[y]$ du point matériel peut être considéré comme une fonctionnelle de la coordonnée verticale $y(x)$ qui est une fonction de la coordonnée horizontale x dont la dérivée $y'(x)$ est la pente de la trajectoire en $y(x)$,

$$T[y] = T\left(y(x), y'(x)\right) \quad \text{où} \quad y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}. \quad (4.31)$$

La vitesse scalaire instantanée est la dérivée temporelle de la variation infinitésimale de

l'abscisse curviligne,

$$v(y(x)) = \frac{ds(y(x))}{dt}. \quad (4.32)$$

Le temps de parcours du point matériel du temps initial t_1 où il se trouve au point 1 de coordonnées $(0, h)$ au temps final t_2 où il se trouve au point 2 de coordonnées $(d, 0)$ est l'intégrale des intervalles de temps infinitésimaux dt entre t_1 et t_2 (Fig. 4.3),

$$T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{y(0)}^{y(d)} \frac{ds(y(x))}{v(y(x))}, \quad (4.33)$$

où $y(0) = h$ et $y(d) = 0$.

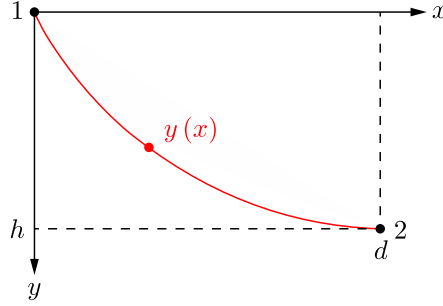


FIGURE 4.3 Un point matériel se déplace selon une cycloïde $y(x)$ en rouge du point 1 de coordonnées $(0, h)$ au point 2 de coordonnées $(d, 0)$.

Par inspection graphique, la variation infinitésimale de l'abscisse curviligne s'écrit,

$$ds(y(x)) = \sqrt{dx^2 + dy^2(x)} = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (4.34)$$

En absence de frottement, l'énergie mécanique du point matériel de masse m est conservée. En comparant l'énergie mécanique E pour une position $y(x)$ et une vitesse $v(y(x))$ quelconques à sa valeur pour une position initiale à l'origine, c'est-à-dire $y(0) = h$, et une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire $v(y(0)) = 0$, on obtient l'identité suivante,

$$E = \frac{1}{2} m v^2(y(x)) + mgy(x) = 0. \quad (4.35)$$

On en déduit l'expression suivante pour la vitesse scalaire,

$$v(y(x)) = \sqrt{2gy(x)} > 0. \quad (4.36)$$

Compte tenu de la variation infinitésimale de l'abscisse curviligne (4.34) et de la vitesse scalaire (4.36), le temps de parcours (4.31) devient,

$$T[y] = \int_0^d \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx. \quad (4.37)$$

D'un point de vue dimensionnel, l'action est le produit d'une énergie et d'un temps. La fonctionnelle action du point matériel $S[y]$ est donc le produit de sa masse constante m , du carré d'une vitesse constante, choisie par exemple comme étant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide c sans perte de généralité, et de la fonctionnelle temps de parcours $T[y]$,

$$S[y] = mc^2 T[y] = mc^2 \int_0^d \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx. \quad (4.38)$$

L'action est l'intégrale temporelle du lagrangien,

$$S[y] = \int_0^d L(y(x), y'(x)) dt(x). \quad (4.39)$$

Afin de pouvoir exprimer l'action (4.38) comme l'intégrale temporelle du lagrangien, on lie l'intervalle de temps infinitésimal au déplacement infinitésimal dx à l'aide d'une vitesse

constante, qu'on choisit comme étant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide c sans perte de généralité,

$$dt(x) = \frac{dx}{c}. \quad (4.40)$$

L'action (4.39) peut alors être remise en forme comme,

$$S[y] = \int_0^d L(y(x), y'(x)) \frac{dx}{c}. \quad (4.41)$$

En comparant les expressions (4.38) et (4.41) de l'action, on en conclut que le lagrangien du point matériel est,

$$L(y(x), y'(x)) = mc^3 \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}}. \quad (4.42)$$

Afin de passer de la mécanique analytique à la description de la courbe brachistochrone, on utilise la correspondance suivante,

$$dt \rightarrow \frac{dx}{c} \quad \text{et} \quad q(t) \rightarrow y(x) \quad \text{et} \quad \dot{q}(t) \rightarrow y'(x). \quad (4.43)$$

Par conséquent, le minimum de l'action (4.14) devient,

$$\delta S = \int_0^d \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right) \delta y \frac{dx}{c} = 0. \quad (4.44)$$

Afin que l'action $S[y]$ soit minimale pour toute coordonnée d'abscisse $x \in [0, d]$ quelle que soit la variation de la coordonnée d'ordonnée δy , il faut que l'intégrand (4.44) s'annule, ce qui donne les équations d'Euler-Lagrange pour la courbe brachistochrone,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (4.45)$$

Clairement, le lagrangien (4.42) ne dépend pas explicitement de la coordonnée d'abscisse x ,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (4.46)$$

Compte tenu de la sect 4.3 et de la correspondance (4.43), la constante du mouvement de Beltrami (4.16) s'écrit,

$$K = \frac{\partial L}{\partial y'(x)} y'(x) - L = \text{cste}. \quad (4.47)$$

On note que cette constante du mouvement K n'est pas l'hamiltonien H du système car $y'(x)$ n'est pas la vitesse scalaire. La dérivée partielle du Lagrangien (4.42) par rapport à la pente $y'(x)$ s'écrit,

$$\frac{\partial L}{\partial y'(x)} = \frac{mc^3 y'(x)}{\sqrt{2gy(x)(1+y'^2(x))}} = \frac{y'(x)}{1+y'^2(x)} L. \quad (4.48)$$

Compte tenu de l'identité (4.48), la constante de Beltrami (4.47) devient,

$$K = \left(\frac{y'^2(x)}{1+y'^2(x)} - 1 \right) L = - \frac{L}{1+y'^2(x)} = \text{cste}. \quad (4.49)$$

A l'aide du lagrangien (4.42), la constante du mouvement (4.49) peut être remise sous la forme suivante,

$$K = - \frac{mc^3}{\sqrt{2gy(x)(1+y'^2(x))}} \equiv - \frac{mc^3}{\sqrt{4gR}} = \text{cste}, \quad (4.50)$$

où R est une constante géométrique avec une unité physique de longueur. Compte tenu de la relation (4.50), on en déduit l'identité géométrique suivante,

$$y(x) \left(1 + y'^2(x) \right) = 2R = \text{cste}. \quad (4.51)$$

La pente positive vers le bas est la solution positive de l'identité géométrique du deuxième degré (4.51),

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \sqrt{\frac{2R - y(x)}{y(x)}}. \quad (4.52)$$

On en déduit la relation suivante entre les différentielles d'abscisse et d'ordonnée,

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2R - y}} dy. \quad (4.53)$$

Afin de montrer que la trajectoire qui minimise l'action, c'est-à-dire la courbe brachistochrone, est une cycloïde, on exprime les coordonnées d'abscisse et d'ordonnée de manière paramétrique. Pour ce faire, on utilise le changement de variable suivant,

$$y = R(1 - \cos \theta). \quad (4.54)$$

Ainsi, la différentielle de la coordonnée d'ordonnée (4.54) s'écrit,

$$dy = R \sin \theta d\theta. \quad (4.55)$$

En substituant la différentielle (4.55) dans la relation différentielle (4.53), elle devient,

$$dx = R \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \sin \theta d\theta = \frac{R(1 - \cos \theta)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \sin \theta d\theta = R(1 - \cos \theta) d\theta. \quad (4.56)$$

La coordonnée d'abscisse est obtenue en intégrant sa différentielle (4.56),

$$x = \int_0^x dx' = R \int_0^\theta (1 - \cos \theta') d\theta' = R(\theta - \sin \theta). \quad (4.57)$$

Les relations (4.54) et (4.57) sont les équations paramétriques des coordonnées cartésiennes x et y d'une cycloïde de rayon R . Par conséquent, on a montré que la courbe brachistochrone est une cycloïde (Fig. 4.4).

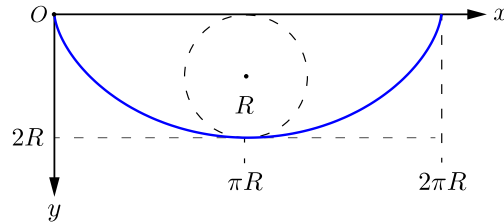


FIGURE 4.4 La courbe brachistochrone est une cycloïde de rayon R (bleu).

Intuitivement, on comprend bien que le point final 2 correspond au minimum de la cycloïde (Fig. 4.4). À présent, on va le montrer en exprimant les coordonnées cartésiennes (d, h) du point 2 en termes du rayon R . En évaluant les équations paramétriques (4.54) et (4.57) au point 2 pour un angle $\theta_2 \in (0, 2\pi)$, on obtient les relations,

$$d = R(\theta_2 - \sin \theta_2) \quad \text{et} \quad h = R(1 - \cos \theta_2). \quad (4.58)$$

Afin d'exprimer la hauteur h en termes du rayon R de la cycloïde, on détermine l'extrémum du rapport de ces deux grandeurs en fonction de l'angle θ_2 ,

$$\left. \frac{d\left(\frac{h}{R}(\theta_2)\right)}{d\theta_2} \right|_{\theta_2} = \left. \frac{d(1 - \cos \theta_2)}{d\theta_2} \right|_{\theta_2} = \sin \theta_2 = 0. \quad (4.59)$$

L'angle θ_2 au point 2 qui minimise le temps de parcours est donc,

$$\theta_2 = \pi. \quad (4.60)$$

Ainsi, les coordonnées d'abscisse et d'ordonnée (4.58) du point 2, lorsque le temps de parcours est minimal, s'écrivent (Fig. 4.5),

$$d = \pi R \quad \text{et} \quad h = 2R, \quad (4.61)$$

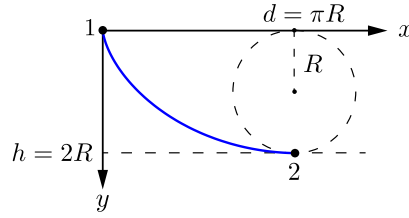


FIGURE 4.5 La première demi période de la cycloïde correspond à la courbe brachistochrone (bleu).

comme il se doit. Compte tenu des relations (4.37), (4.51) et (4.54), on obtient le temps de parcours du point matériel le long de la cycloïde,

$$\begin{aligned}
 T[y] &= \int_0^d \sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{2gy(x)}} dx = \int_0^d \sqrt{\frac{2R}{2gy^2(x)}} dx \\
 &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2R}{2gR^2(1-\cos\theta)^2}} R(1-\cos\theta) d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\pi d\theta = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

A titre de comparaison, on détermine le temps de parcours du point matériel en ligne droite de l'état initial à l'état final. Le mouvement rectiligne du point matériel uniformément accéléré dont la trajectoire fait un angle α constant avec l'horizontale est soumis à une accélération $g \sin \alpha$. La distance d' parcourue durant un temps de parcours T' lorsque le point matériel est lâché sans vitesse initiale est exprimée en termes de la dénivellation $h = 2R$ (Fig. 4.6),

$$d' = \frac{1}{2} g \sin \alpha T'^2 = \frac{1}{2} g \frac{2R}{d'} T'^2. \tag{4.63}$$

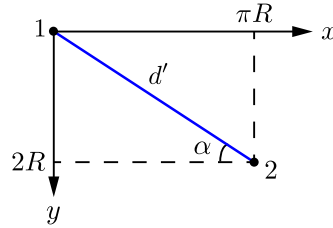


FIGURE 4.6 Mouvement rectiligne uniformément accéléré du point matériel selon une trajectoire qui fait un angle α avec l'horizontale.

Par inspection graphique, compte tenu du théorème de Pythagore, la distance d' parcourue en ligne droite s'écrit,

$$d' = \sqrt{(\pi R)^2 + (2R)^2} = \pi R \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}. \tag{4.64}$$

Compte tenu du temps de parcours (4.62) selon la courbe brachistochrone et de la distance (4.64) parcourue en ligne droite, le temps de parcours en ligne droite (4.63) s'écrit,

$$T' = \frac{d'}{\sqrt{Rg}} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} T = 1.185 T. \tag{4.65}$$

Par conséquent, le temps parcours d'un état initial à un état final fixé est 18.5% plus long en ligne droite que selon une courbe brachistochrone.

4.6 Equations de Maxwell

En guise d'application des équations de champs d'Euler-Lagrange (4.30), on établit les équations de Maxwell en minimisant l'action d'un champ électromagnétique en présence d'une densité de charge électrique $\rho(\mathbf{r}, t)$ et d'une densité de courant électrique $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ dans le vide,

$$S[\phi, \mathbf{A}] = \int dt \iiint d^3r \left(\frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\phi, \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{A}) \right) - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (4.66)$$

où ϕ est potentiel scalaire, \mathbf{A} est le potentiel vecteur, ε_0 est la permittivité électrique du vide et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Compte tenu de la relation (4.21), l'action électromagnétique (4.66) est l'intégrale spatio-temporelle de la densité lagrangienne électromagnétique,

$$\mathcal{L}(\phi, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\phi, \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{A}) \right) - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (4.67)$$

où les champs électrique et magnétique sont exprimés en termes des potentiels comme,

$$\mathbf{E}(\phi, \mathbf{A}) = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.68)$$

Pour l'action du champ électromagnétique interagissant avec des particules chargées et des courants électriques, les degrés de liberté sont le potentiel scalaire et les trois composantes du potentiel vecteur, c'est-à-dire que $\phi_\mu \in \{\phi, A_i\}$. La densité lagrangienne (4.67) est écrite en composantes comme,

$$\mathcal{L}(\phi, A_i) = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i=1}^3 E_i^2 - \frac{1}{2\mu_0} \sum_{i=1}^3 B_i^2 - \rho\phi + \sum_{i=1}^3 j_i A_i, \quad (4.69)$$

où les composantes des champs électrique et magnétique sont exprimées en termes des composantes des potentiels comme,

$$E_i = -\partial_i \phi - \dot{A}_i \quad \text{et} \quad B_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (4.70)$$

Ainsi, les dérivées partielles des champs électromagnétiques s'écrivent,

$$\frac{\partial E_i}{\partial(\partial_j \phi)} = -\delta_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_i}{\partial \dot{A}_j} = -\delta_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_i}{\partial(\partial_j A_k)} = \varepsilon_{ijk}. \quad (4.71)$$

Les équations de champs d'Euler-Lagrange (4.30) pour le potentiel scalaire $\phi_\mu = \phi$ s'écrivent formellement,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (4.72)$$

Etant donné que la densité lagrangienne (4.69) ne dépend pas explicitement de $\dot{\phi}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad (4.73)$$

les équations d'Euler-Lagrange (4.72) se réduisent à,

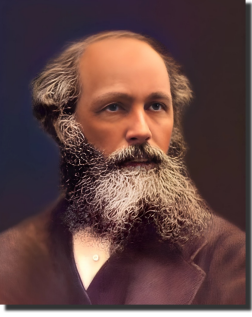
$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial(\partial_j \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (4.74)$$

A l'aide de la densité lagrangienne (4.69) et des dérivées partielles (4.71), les équations d'Euler-Lagrange (4.74) deviennent,

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{d}{dx_j} (-\varepsilon_0 E_i \delta_{ij}) + \rho = 0, \quad (4.75)$$

ou de manière équivalente,

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j E_j = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (4.76)$$



James Clerk Maxwell

qui est l'équation de Gauss électrique,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (4.77)$$

Les équations d'Euler-Lagrange (4.30) pour les composantes scalaires $\phi_\mu = A_j$ du potentiel vecteur s'écrivent formellement,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} = 0. \quad (4.78)$$

Elles sont remises en forme comme,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial \dot{A}_j} \right) + \sum_{i,k=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_k} \frac{\partial B_k}{\partial (\partial_i A_j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} = 0. \quad (4.79)$$

A l'aide de la densité lagrangienne (4.69) et des dérivées partielles (4.71), les équations d'Euler-Lagrange (4.79) deviennent,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (-\varepsilon_0 E_i \delta_{ij}) + \sum_{i,k=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left(-\frac{1}{\mu_0} B_k \varepsilon_{kij} \right) - j_j = 0, \quad (4.80)$$

par antisymétrie des symboles de Levi-Civita $\varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik}$. Par conséquent, l'équation d'Euler-Lagrange (4.80) est remise sous la forme suivante,

$$\sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{jik} \partial_i B_k = \mu_0 j_j + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E_j, \quad (4.81)$$

qui est la composante j de l'équation vectorielle de Maxwell-Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}. \quad (4.82)$$

La divergence du champ magnétique \mathbf{B} exprimée en termes du potentiel vecteur \mathbf{A} s'écrit vectoriellement,

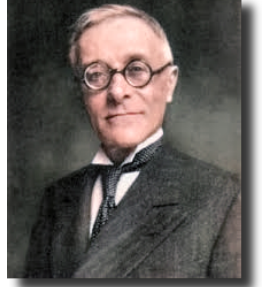
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (4.83)$$

et se transcrit en composantes pour donner explicitement l'équation de Gauss magnétique,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \partial_i \left(\sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \right) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0. \quad (4.84)$$

Le rotationnel du champ électrique \mathbf{E} exprimé en termes des potentiels scalaire ϕ et vecteur \mathbf{A} donne l'équation de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \phi - \nabla \times \partial_t \mathbf{A} = -\partial_t \nabla \times \mathbf{A} = -\partial_t \mathbf{B}. \quad (4.85)$$



Tullio Levi-Civita

5

Probabilités et statistiques

5.1 Introduction

Les probabilités et les statistiques qui en découlent sont omniprésentes en physique. Elles sont soit inhérentes à la théorie, comme c'est le cas en physique quantique, soit liées à un manque d'information, comme c'est le cas en physique statistique. En effet, d'un point de vue pratique, il n'est pas possible de décrire le comportement macroscopique de la matière à l'aide des coordonnées de position et de vitesse de l'ensemble de ses constituants microscopiques. Il est donc nécessaire d'adopter une approche statistique.

Les probabilités sont normalisées et satisfont les trois axiomes de Kolmogorov énoncés en sect. 5.2. Les valeurs moyennes $\langle X \rangle$ des variables aléatoires X discrète et continue ainsi que leur variance σ^2 sont également définies dans cette section. Les bases de l'analyse combinatoire sont posées en sect. 5.3 en définissant les permutations P_n de n éléments discernables, les arrangements A_k^n de k éléments discernables parmi n avec et sans répétition, et les combinaisons C_k^n de k éléments indiscernables parmi n .

Les lois statistiques discrètes et continues qui interviennent le plus fréquemment en physique sont la loi binomiale $B(k, n, p)$, la loi de Poisson $B(k, \lambda)$ et la loi normale $G(x, \mu, \sigma)$ définies en sect. 5.4.

En guise d'illustration physique des lois statistiques binomiale et normale, on modélise la marche aléatoire d'une particule sur un réseau unidimensionnel en sect. 5.5. La symétrie du mouvement implique que la probabilité p qu'une particule se déplace vers la gauche est égale à la probabilité q qu'elle se déplace vers la droite. Dans la limite du continu, c'est-à-dire en faisant tendre la taille de la maille spatio-temporelle du réseau vers zéro, la probabilité de trouver la particule sur le site k du réseau à l'étape n divisée par l'arrête a tend vers la densité de probabilité $f(x, t)$ de trouver cette particule en position x au temps t . Dans cette limite, la loi binomiale $B(k, n, p)$ discrète tend vers la loi normale $G(x, \mu, \sigma)$ continue. Ceci est une application intéressante du théorème central limite des statistiques.

Les dérivées partielles temporelles et spatiales de la densité de probabilité $f(x, t)$ sont liées par la constante de diffusion D à travers l'équation de diffusion de probabilités en une dimension en sect. 5.6. La densité de probabilité et l'équation de diffusion de probabilités en deux et trois dimensions sont établies en sect. 5.7. Comme il n'y a pas de corrélation entre les densités de probabilités selon des axes orthogonaux, la densité de probabilités en deux dimensions est factorisable $f(x, y, t) = f(x, t) f(y, t)$ et il en va de même en trois dimensions $f(x, y, z, t) = f(x, t) f(y, t) f(z, t)$.

5.2 Probabilités

La probabilité de réalisation d'un événement particulier A , qui est un sous-ensemble de l'ensemble Ω des événements possibles, s'écrit,

$$p : A \subset \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \text{tel que} \quad p(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}, \quad (5.1)$$

où $\# A$ est le nombre d'éléments de A et $\# \Omega$ est le nombre d'éléments de Ω . Les probabilités satisfont les trois axiomes de Kolmogorov,

$$1 \quad 0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall A,$$

$$2 \quad p(\Omega) = 1,$$

$$3 \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \text{si} \quad p(A \cap B) = 0 \quad \forall A, B.$$

La somme des probabilités doit satisfaire la condition de normalisation,

$$\sum_A p(A) = 1. \quad (5.2)$$

La probabilité de non réalisation d'un événement particulier A est le complément de la probabilité de réalisation de cet événement,

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A). \quad (5.3)$$

La probabilité $p(A \cap B)$ que les événements A et B se réalisent simultanément est exprimée soit en termes de la probabilité conditionnelle $p(A|B)$ que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est déjà réalisé soit en termes de la probabilité conditionnelle $p(B|A)$ que l'événement B se réalise sachant que l'événement A s'est déjà réalisé comme,

$$p(A \cap B) = p(A|B)p(B) = p(B|A)p(A). \quad (5.4)$$

On en déduit le théorème de Bayes,

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}. \quad (5.5)$$

Une variable aléatoire $X(A)$ réelle discrète est une fonction qui associe à chaque événement un nombre entier, $X : A \rightarrow \mathbb{R}$. L'espérance de cette variable aléatoire représente sa valeur moyenne pondérée par les probabilité de réalisation $p(A)$ des événements $A \in \Omega$. Ainsi, elle est définie comme,

$$\langle X \rangle = \sum_{A \subset \Omega} X(A) p(A). \quad (5.6)$$

La variance d'une variable aléatoire σ^2 est l'espérance du carré de la déviation de la variable aléatoire par rapport à son espérance,

$$\sigma^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle, \quad (5.7)$$

qui peut être développée comme,

$$\sigma^2 = \langle X^2 - 2\langle X \rangle X + \langle X \rangle^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - 2\langle X \rangle \langle X \rangle + \langle X \rangle^2, \quad (5.8)$$

qui peut être remise en forme comme,

$$\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \geq 0. \quad (5.9)$$

L'écart type est défini comme la racinée carrée de la variance,

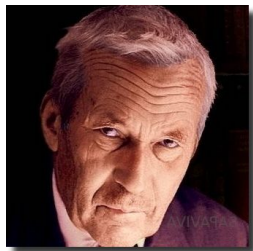
$$\sigma = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \geq 0. \quad (5.10)$$

Pour une variable aléatoire continue $X(x)$, la probabilité qu'elle ait une valeur inférieure ou égale à a est donnée par fonction de répartition,

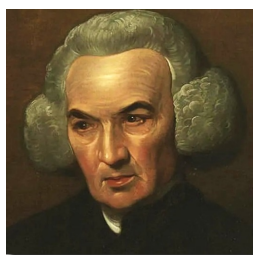
$$p(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx, \quad (5.11)$$

où $f_X(x)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire $X(x)$. Le produit $f_X(x) dx$ est la probabilité que la variable aléatoire $X(x)$ ait une valeur comprise dans l'intervalle infinitésimal $[x, x + dx]$. La condition de normalisation s'écrit,

$$p(X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (5.12)$$



Andreï Kolmogorov



Thomas Bayes

L'espérance, ou la valeur moyenne de la variable aléatoire continue $X(x)$ est une intégrale pondérée par la densité de probabilité sur le domaine de définition $(-\infty, \infty)$ de la variable aléatoire,

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X(x) f_X(x) dx. \quad (5.13)$$

La modélisation d'un phénomène physique fait souvent intervenir plusieurs variables aléatoires. Dans le cas où n variables aléatoires $X_1(x_1) \dots X_n(x_n)$ sont indépendantes, la fonction de répartition de l'ensemble des variables aléatoires est factorisable,

$$p(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = p(X_1 \leq x_1) \dots p(X_n \leq x_n). \quad (5.14)$$

Dans ce cas, compte tenu de la définition de la fonction de répartition (5.11), les densités de probabilités sont aussi factorisables,

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n). \quad (5.15)$$

5.3 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire a pour but de compter le nombre d'éléments d'un grand ensemble fini à l'aide de configurations. Il y a quatre types de configurations principales : les permutations, les arrangements avec répétition, les arrangements sans répétition et les combinaisons. Le nombre de permutations P_n de n éléments discernables s'écrit,

$$P_n = n!. \quad (5.16)$$

En effet, il y a n possibilités pour le premier élément, $n - 1$ possibilités pour le deuxième élément et ainsi de suite ... jusqu'au dernier. Le nombre de permutation P_n est le produit des possibilités pour les n éléments. Le nombre d'arrangements A_k^n de k éléments discernables parmi n avec répétition s'écrit,

$$A_k^n = n^k. \quad (\text{avec répétition}) \quad (5.17)$$

En effet, il y a n possibilités pour le premier élément, n possibilités pour le deuxième élément et ainsi de suite ... jusqu'au k^e . Le nombre d'arrangements A_n^k avec répétition est le produit des possibilités pour les n éléments. Le nombre d'arrangements A_k^n de k éléments discernables parmi n sans répétition, où $k \leq n$, s'écrit,

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (\text{sans répétition}) \quad (5.18)$$

En effet, il y a n possibilités pour le premier élément, $n - 1$ possibilités pour le deuxième élément et ainsi de suite ... jusqu'au k^e . Le nombre de combinaisons C_k^n de k éléments indiscernables parmi n avec répétition s'écrit,

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! k!} \equiv \binom{n}{k}. \quad (5.19)$$

Pour illustrer la différence entre des éléments discernables et indiscernables, on peut prendre des boules de deux couleurs numérotées avec des nombres différents. Si on permute des boules de couleur identique, la configuration finale des boules n'est pas la même que la configuration initiale parce les boules numérotées sont discernables. Si on enlève la numérotation des boules et qu'on permute des boules de couleur identique, la configuration finale des boules est la même que la configuration initiale parce les boules non-numérotées sont indiscernables (Fig. 5.1).

5.4 Statistiques

En mathématiques, les statistiques ont en général pour objectif de déterminer les lois statistiques auxquelles obéissent des ensembles de données. En physique théorique, l'approche

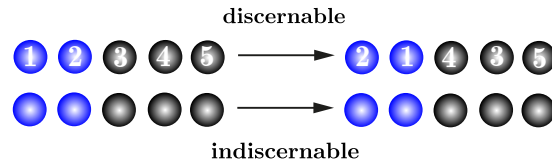


FIGURE 5.1 Permutation discernable de boules numérotées et permutation indiscernable de boules non-numérotées.

est en général opposée. Les lois statistiques sont connues et on se base sur ces lois pour la modélisation de phénomènes stochastiques. Pour des variables aléatoires discrètes X , ces lois donnent la probabilité que les variables aléatoires ait une valeur k donnée, c'est-à-dire $p(X = k)$. Pour des variables aléatoires continues X , ces lois donnent la densité de probabilité que les variables aléatoires ait une valeur x donnée, c'est-à-dire $f_X(x)$. Les lois statistiques pour des variables aléatoires discrète les plus importantes en physique sont la loi binomiale et la loi de Poisson.

La loi binomiale, que l'on doit à Newton, décrit les probabilités de succès d'expériences avec un résultat binaire : soit un succès soit un échec. Elle décrit la probabilité que la variable aléatoire discrète $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ comptant le nombre de succès ait une valeur k lors de n expériences aléatoires dont la probabilité individuelle de succès est p et la probabilité individuelle d'échec est son complément, soit $q = 1 - p$. Cette loi s'écrit donc (Fig. 5.2),

$$p(X = k) \equiv B(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (5.20)$$

On montre aisément qu'elle est normalisée. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n p(X = k) &= \sum_{k=0}^n B(k, n, p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1. \end{aligned} \quad (5.21)$$

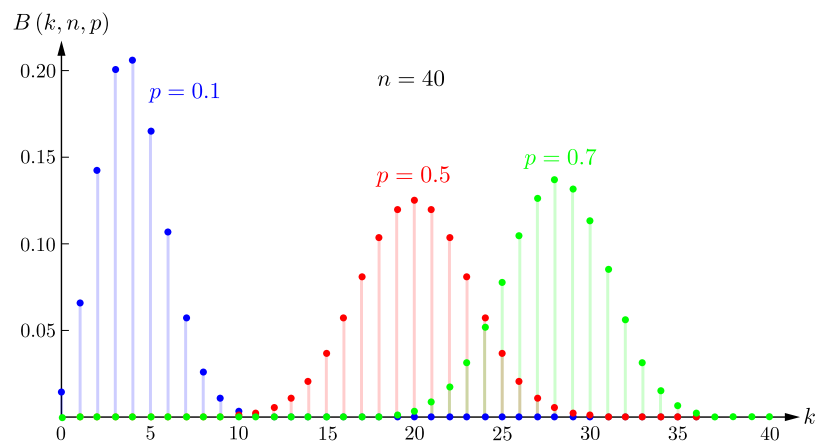
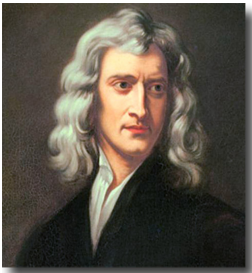


FIGURE 5.2 Loi binomiale $B(k, n, p)$ pour $n = 40$ et $p = 0.1$ en bleu, $p = 0.5$ en rouge et $p = 0.7$ en vert.

La loi de Poisson décrit la probabilité d'occurrence d'un événement en fonction de la valeur moyenne du nombre d'occurrence. Elle décrit la probabilité que la variable aléatoire discrète $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, comptant le nombre d'occurrences, ait une valeur k pour une valeur moyenne du nombre d'occurrences λ . Cette loi s'écrit donc (Fig. 5.3),

$$p(X = k) \equiv P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (5.22)$$



Isaac Newton



Siméon Denis Poisson

On montre aisément qu'elle est normalisée. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} p(X = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(k, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1. \end{aligned} \tag{5.23}$$

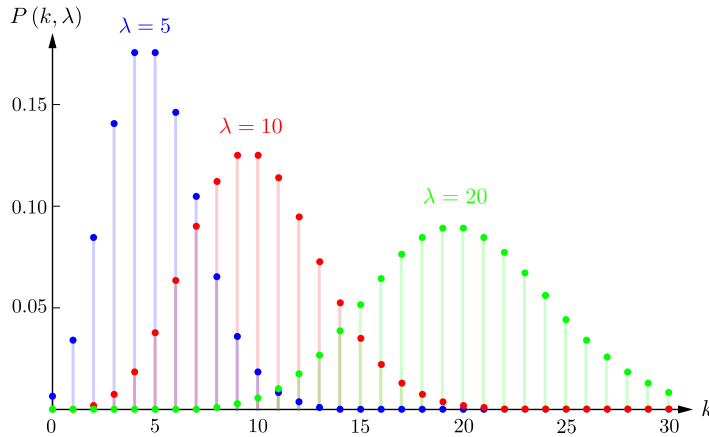


FIGURE 5.3 Loi de Poisson $P(k, \lambda)$ pour $\lambda = 5$ en bleu, $\lambda = 10$ en rouge et $\lambda = 20$ en vert.

La loi normale décrit la densité de probabilité d'avoir un résultat d'expérience en fonction de sa moyenne et de son écart-type. Elle décrit la densité de probabilité que la variable aléatoire continue $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donnant le résultat de l'expérience, ait une valeur x pour une valeur moyenne μ et un écart-type σ . Cette loi s'écrit donc (Fig. 5.4),

$$f_X(x) \equiv G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{5.24}$$

A présent, on montre qu'elle est normalisée. L'intégrale de cette densité de probabilité s'écrit,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \tag{5.25}$$



Carl Friedrich Gauss

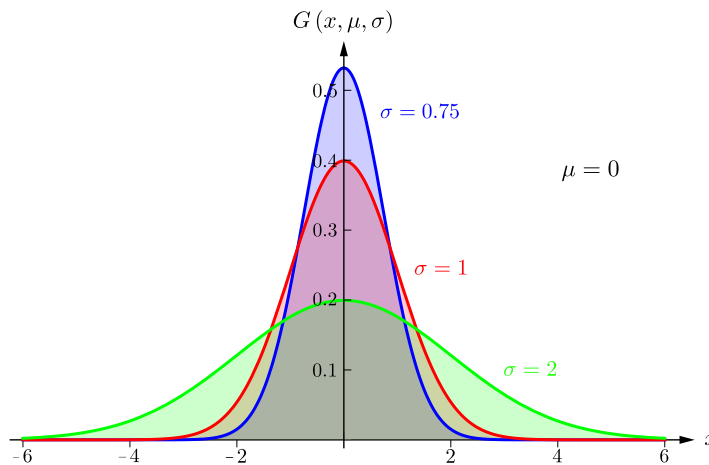


FIGURE 5.4 Loi normale $G(x, \mu, \sigma)$ pour $\mu = 0$ et $\sigma = 0.75$ en bleu, $\sigma = 1$ en rouge et $\sigma = 2$ en vert.

L'intégrale de la gaussienne est remise en forme comme,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d(x-\mu) \\ &= 2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d(x-\mu). \end{aligned} \quad (5.26)$$

A l'aide du changement de variables,

$$z = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \quad \text{ainsi} \quad dz = \frac{x-\mu}{\sigma^2} d(x-\mu), \quad (5.27)$$

on en déduit que,

$$d(x-\mu) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} z^{-1/2} dz. \quad (5.28)$$

Ainsi, l'intégrale gaussienne (5.26) devient,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= 2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d(x-\mu) \\ &= \sqrt{2} \sigma \int_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-z} dz = \sqrt{2} \sigma \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \sigma. \end{aligned} \quad (5.29)$$

En substituant ce résultat (5.29) dans l'intégrale de la densité de probabilité (5.25), on montre alors que la loi normale est normalisée,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1. \quad (5.30)$$

5.5 Marche aléatoire en une dimension

Comme application physique de ce chapitre sur les probabilités et statistiques, on va modéliser une marche aléatoire symétrique à une dimension d'une particule sur un réseau discret à l'aide de la loi binomiale. Dans la limite du continu, on verra que la densité de probabilité de présence satisfait une équation de diffusion ce qui peut sembler assez intuitif mais qui est assez ardu à démontrer explicitement.

Dans ce modèle, on considère des arrêtes égales de longueur $a > 0$ disposées le long de l'axe des abscisses. A chaque de temps t ,

$$t = n\tau \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \quad (5.31)$$

qui est un multiple positif n de l'intervalle de temps fondamental τ , la particule se trouve en position x ,

$$x = ka \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{R}_+, \quad (5.32)$$

qui est un multiple k de l'arrête fondamentale a . A l'instant initial $t = 0$, la particule se trouve à l'origine en $x = 0$,

$$n = 0 \quad \text{et} \quad k = 0 \quad \text{lorsque} \quad t = 0 \quad \text{et} \quad x = 0. \quad (5.33)$$

On note d le nombre de déplacements vers la droite et g le nombre de déplacements vers la gauche à l'étape n lorsque la particule est sur le site k le long de l'axe des abscisses,

$$n = d + g \quad \text{et} \quad k = d - g. \quad (5.34)$$

En inversant les relations (5.34), on en déduit que,

$$d = \frac{n+k}{2} \quad \text{et} \quad g = \frac{n-k}{2}. \quad (5.35)$$

Si la particule est sur un site k positif le long de l'axe des abscisses à l'étape n , elle se trouve à droite de l'origine. Si elle est sur un site k négatif le long de cet axe, elle se trouve à

gauche de l'origine (Fig. 5.5). Soient p la probabilité d'un déplacement vers la droite et q la probabilité d'un déplacement vers la gauche qui sont bien évidemment complémentaires,

$$q = 1 - p. \quad (5.36)$$

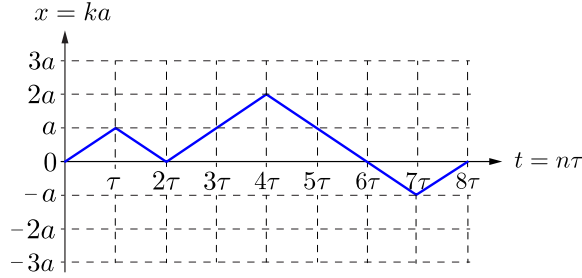


FIGURE 5.5 Marche aléatoire d'une particule le long de l'axe des abscisses en position $x = ka$ au temps $t = n\tau$.

La probabilité de présence de la particule en position $x = ka$ au temps $t = n\tau$ est donnée par la loi binomiale,

$$p(k, n) \equiv B(d, n, p) = \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d}, \quad (5.37)$$

La loi binomiale est symétrique sous échange des mouvements vers la droite et vers la gauche, c'est-à-dire $d \leftrightarrow g$ et $p \leftrightarrow q$. En effet,

$$\begin{aligned} B(d, n, p) &= \frac{n!}{(n-d)!d!} p^d (1-p)^{n-d} = \frac{n!}{g!d!} p^d q^g \\ &= \frac{n!}{g!(n-g)!} (1-q)^{n-g} q^g = B(g, n, q). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Une représentation intégrale de la loi binomiale s'écrit,

$$p(k, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi (p e^{i\varphi} + q e^{-i\varphi})^n e^{-ik\varphi}. \quad (5.39)$$

Afin de montrer ce résultat, on utilise la première identité (5.35), à savoir $k + n = 2d$, et la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} p(k, n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi (p e^{i\varphi} + q e^{-i\varphi})^n e^{-ik\varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\sum_{d=1}^n \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d q^{n-d} e^{-i(n-2d)\varphi} \right) e^{-ik\varphi} \\ &= \sum_{d=1}^n \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d q^{n-d} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-i(n+k-2d)\varphi} \\ &= \sum_{d=1}^n \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d q^{n-d} \delta_{n+k, 2d} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \\ &= \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} = B(d, n, p) \quad \square \end{aligned} \quad (5.40)$$

Pour une marche aléatoire symétrique de la particule en une dimension, les probabilités que la particule se déplace vers la droite ou vers la gauche sont égales,

$$p = q = \frac{1}{2}. \quad (5.41)$$

Par conséquent, la représentation intégrale de la loi binomiale (5.39) se réduit dans le cas

symétrique à,

$$p(k, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^n e^{-ik\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \varphi)^n e^{-ik\varphi} d\varphi. \quad (5.42)$$

Dans le cas où les nombres d'étapes n est pair, la représentation intégrale symétrique (5.42) devient,

$$p(k, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{n \ln |\cos \varphi|} e^{-ik\varphi} d\varphi. \quad (5.43)$$

Compte tenu de la taille des mailles spatio-temporelles élémentaires du réseau (5.32), la représentation intégrale symétrique (5.43) est remise en forme comme,

$$p\left(\frac{x}{a}, \frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\varphi)|} e^{-i\frac{x}{a}\varphi} d\varphi. \quad (5.44)$$

Etant donné que la loi binomiale tend vers la loi normale dans la limite des grands nombres, c'est-à-dire la limite du continu, on va faire un changement de variables afin de faire apparaître une gaussienne,

$$\varphi = \sqrt{\tau} \phi \quad \text{et} \quad a = \sqrt{2D\tau}. \quad (5.45)$$

Compte tenu du changement de variables (5.45), la représentation intégrale symétrique (5.44) devient,

$$\begin{aligned} p\left(\frac{x}{a}, \frac{t}{\tau}\right) &= \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\sqrt{\tau}\phi)|} e^{-i\frac{x}{a}\sqrt{\tau}\phi} d\phi \\ &= \frac{a}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\sqrt{\tau}\phi)|} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi} d\phi. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Le passage à la limite du continu se fait en faisant tendre la taille des mailles spatio-temporelles élémentaires vers zéro, c'est-à-dire $a \rightarrow 0$ et $\tau \rightarrow 0$. La densité de probabilité est alors définie comme la limite du continu du rapport de la probabilité divisée par l'arrête élémentaire,

$$f(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p\left(\frac{x}{a}, \frac{t}{\tau}\right)}{a}. \quad (5.47)$$

Compte tenu de la probabilité (5.46), la densité de probabilité (5.47) s'écrit,

$$f(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\sqrt{\tau}\phi)|} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi} d\phi. \quad (5.48)$$

En faisant un développement limité au deuxième ordre en $\sqrt{\tau}\phi$ de l'argument de la première exponentielle,

$$\ln |\cos(\sqrt{\tau}\phi)| \simeq \ln \left| 1 - \frac{1}{2}\tau\phi^2 \right| \simeq -\frac{1}{2}\tau\phi^2, \quad (5.49)$$

la densité de probabilité (5.48) devient,

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}\phi^2} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi} d\phi. \quad (5.50)$$

Elle ne dépend plus de la taille de la maille spatio-temporelle élémentaire, comme il se doit dans la limite du continu. Afin de résoudre cette intégrale, on définit les coefficients,

$$A = \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad B = -i\frac{x}{\sqrt{2D}}. \quad (5.51)$$

L'intégrale dans l'expression (5.50) de la densité de probabilités est exprimée en termes des coefficients (5.51) comme,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2 + B\phi} d\phi = e^{\frac{B^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(\phi - \frac{B}{A})^2} d\phi. \quad (5.52)$$

A l'aide du changement de variables,

$$z = A \left(\phi - \frac{B}{A} \right)^2, \quad (5.53)$$

et de sa différentielle,

$$dz = 2A \left(\phi - \frac{B}{A} \right) \quad \text{ainsi} \quad d \left(\phi - \frac{B}{A} \right) d \left(\phi - \frac{B}{A} \right) = \frac{z^{-1/2}}{2\sqrt{A}} dz, \quad (5.54)$$

on évalue l'intégrale de la gaussienne (5.52),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2+B\phi} d\phi &= e^{\frac{B^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(\phi-\frac{B}{A})^2} d\phi \\ &= 2e^{\frac{B^2}{4A}} \int_0^{\infty} e^{-A(\phi-\frac{B}{A})^2} d \left(\phi - \frac{B}{A} \right) \\ &= \frac{e^{\frac{B^2}{4A}}}{\sqrt{A}} \int_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-z} dz = \frac{e^{\frac{B^2}{4A}}}{\sqrt{A}} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Compte tenu des coefficients (5.51), la solution explicite de l'intégrale (5.55) est,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}\phi^2} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi} d\phi = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (5.56)$$

A l'aide de l'intégrale d'une gaussienne, on montre que la densité de probabilité est donnée par la loi normale (5.24),

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad (5.57)$$

où la moyenne μ et la variance σ^2 sont,

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = 2Dt. \quad (5.58)$$

La moyenne μ est nulle parce que la marche aléatoire est symétrique et l'écart type $\sigma = \sqrt{2Dt}$ est une longueur qui caractérise la diffusion de la particule. A l'instant initial $t = 0$, la particule se trouve à l'origine, ce qui implique que la densité de probabilité est une distribution de Dirac, c'est-à-dire $f(x, 0) = \delta(x)$. En effet, en évaluant la densité de probabilités (5.50) compte tenu du changement de variables,

$$k' = \frac{\phi}{\sqrt{2D}} \quad \text{et} \quad dk' = d \left(\frac{\phi}{\sqrt{2D}} \right), \quad (5.59)$$

on obtient,

$$f(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'x} dk' = \delta(x). \quad (5.60)$$

Etant donné que la marche aléatoire est symétrique, l'espérance ou la valeur moyenne $\langle x(t) \rangle$ de la variable aléatoire position de la particule doit être nulle en tout temps t . En effet,

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 0, \quad (5.61)$$

où la dernière identité est le résultat du fait que l'intégrand est le produit de la fonction impaire x et de la fonction paire $e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ de la variable x . Les fluctuations de la position de la particule sont données par sa variance,

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t) dx \\ &= \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{4Dt} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} d \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 e^{-\eta^2} d\eta = 2Dt, \end{aligned} \quad (5.62)$$

comme il se doit, compte tenu de la deuxième relation (5.58).

5.6 Equation de diffusion de probabilités

Dans cette section, on montre que la densité de probabilité $f(x, t)$ associée à la marche aléatoire continue et symétrique à une dimension d'une particule satisfait une équation de diffusion. La dérivée temporelle du profil gaussien de la densité de probabilités (5.57) s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi D} t^{1/2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{x^2}{\sqrt{4\pi D} t^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D} t^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2} \right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

La dérivée spatiale première du profil gaussien de la densité de probabilités (5.57) est de la forme,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D} t^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi D} t^{1/2}} \frac{x}{2Dt} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad (5.64)$$

et ainsi sa dérivée spatiale deuxième s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi D} t^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{x}{2Dt} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D} t^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right). \end{aligned} \quad (5.65)$$

En comparant les dérivées partielles temporelle (5.63) et spatiale (5.65) de la densité de probabilité (5.57), on en déduit l'équation de diffusion de probabilités pour une marche aléatoire continue et symétrique en une dimension,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (5.66)$$

où D est la constante de diffusion qui a permis à Einstein de montrer le fondement atomique de la matière dans son étude du mouvement brownien en 1905.

5.7 Marche aléatoire en deux et trois dimensions

A présent, on peut aisément généraliser ce résultat afin de décrire une marche aléatoire en deux et trois dimensions. Etant que les densités de probabilité qu'une particule se déplace dans des directions orthogonales sont indépendantes et identiquement distribuées, ce qui signifie qu'il n'y a pas de corrélation entre elles, la densité de probabilité (5.57) qu'une particule se déplace dans le plan horizontal d'axes cartésiens d'abscisse et d'ordonnées s'écrit,

$$f(x, y, t) = f(x, t) f(y, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \right). \quad (5.67)$$

Elle est remise en forme comme,

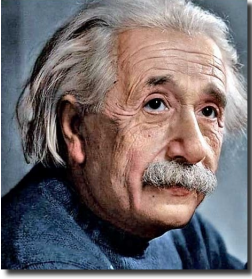
$$f(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}. \quad (5.68)$$

La dérivée temporelle du profil gaussien de la densité de probabilités (5.68) s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi Dt} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} + \frac{1}{4\pi Dt} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{t} + \frac{x^2+y^2}{4Dt^2} \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Les dérivées spatiales premières du profil gaussien de la densité de probabilités (5.68) par rapport à x et y sont de la forme,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi Dt} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \right) = -\frac{1}{4\pi Dt} \frac{x}{2Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}, \\ \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} &= \frac{1}{4\pi Dt} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \right) = -\frac{1}{4\pi Dt} \frac{y}{2Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}, \end{aligned} \quad (5.70)$$



Albert Einstein



Robert Brown

et ainsi ses dérivées spatiales deuxièmes par rapport x et y s'écrivent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4\pi Dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} + \frac{x}{2Dt} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right), \\ \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2} &= -\frac{1}{4\pi Dt} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} + \frac{y}{2Dt} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{y^2}{4D^2 t^2} \right).\end{aligned}\tag{5.71}$$

En comparant les dérivées partielles temporelle (5.69) et spatiales (5.71) de la densité de probabilité (5.68), on en déduit l'équation de diffusion de probabilités pour une marche aléatoire continue et symétrique en deux dimensions (Fig. 5.6),

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2} \right).\tag{5.72}$$

FIGURE 5.6 Animation d'une marche aléatoire en deux dimensions.

La densité de probabilité (5.57) qu'une particule se déplace dans l'espace à trois dimensions s'écrit,

$$\begin{aligned}f(x, y, z, t) &= f(x, t) f(y, t) f(z, t) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \right).\end{aligned}\tag{5.73}$$

Elle est remise en forme comme,

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}.\tag{5.74}$$

La dérivée temporelle du profil gaussien de la densité de probabilités (5.68) s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \right) e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} + \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \left(-\frac{3}{2t} + \frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt^2} \right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Les dérivées spatiales premières du profil gaussien de la densité de probabilités (5.74) par rapport à x , y et z sont de la forme,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} &= \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \right) \\ &= -\frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \frac{x}{2Dt} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}, \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} &= \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \right) \\ &= -\frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \frac{y}{2Dt} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}, \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} &= \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \right) \\ &= -\frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \frac{z}{2Dt} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

et ainsi ses dérivées spatiales deuxièmes par rapport x , y et z s'écrivent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} + \frac{x}{2Dt} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right), \\ \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial y^2} &= -\frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} + \frac{y}{2Dt} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{y^2}{4D^2 t^2} \right), \\ \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial z^2} &= -\frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} + \frac{z}{2Dt} \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi D)^{3/2} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \left(-\frac{1}{2Dt} + \frac{z^2}{4D^2 t^2} \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

En comparant les dérivées partielles temporelle (5.75) et spatiales (5.77) de la densité de probabilité (5.74), on en déduit l'équation de diffusion de probabilités pour une marche aléatoire continue et symétrique en trois dimensions,

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right). \quad (5.78)$$

La densité de probabilité (5.74) peut être exprimée en termes du vecteur position \mathbf{r} et du temps t comme,

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4Dt}}. \quad (5.79)$$

Compte tenu du laplacien de la densité de probabilité en coordonnées cartésiennes,

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial z^2}, \quad (5.80)$$

l'équation de diffusion de probabilité en trois dimensions (5.81) prend la forme compacte suivante,

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 f(\mathbf{r}, t). \quad (5.81)$$

6

Séries de Fourier

6.1 Introduction

Les séries de Fourier réelles sont des représentations d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles comme combinaison linéaire dénombrable de fonctions sinusoidales orthogonales comme montré en sect. 6.2. Ces fonctions sinusoidales forment une base de dimension infinie. Les relations d'orthonormalité entre ces fonctions réelles sont établies en sect. 6.3. Les fonctions impaires de cette base sont des fonctions $\sin nx$ et les fonctions paires sont des fonctions $\cos nx$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Les relations intégrales pour les coefficients de Fourier pairs a_n et impairs b_n en termes des fonctions $\cos nx$ et $\sin nx$ respectivement sont établies en sect. 6.4. Pour qu'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles admette un développement en série de Fourier réelle, il faut qu'elle satisfasse les trois conditions de Dirichlet.

D'après la formule d'Euler $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$, une fonction continue par morceaux est aussi représentée comme combinaison linéaire dénombrable d'exponentielles à argument imaginaire $e^{\pm inx}$. Cette représentation est la série de Fourier complexe de la fonction établie en sect. 6.5. La relation d'orthonormalité entre ces exponentielles à argument imaginaire et le théorème de Parseval sont aussi démontrés dans cette section. Ce théorème est très utile en mécanique quantique pour les calculs de probabilités basé sur les fonctions d'onde. Les simplifications des séries de Fourier due à la parité sont détaillées en sect. 6.6.

Dans la résolution de problèmes de physique, il est souvent utile d'exprimer l'argument des fonctions sinusoidales en fonction en termes d'une longueur au lieu d'un angle. En sect. 6.7, les séries de Fourier réelles sont exprimées par rapport à une base de fonctions impaires $\sin(n\pi x/L)$ et une base de fonctions paires $\cos(n\pi x/L)$. Les relations d'orthonormalité et les relations intégrales pour les coefficients sont aussi exprimées en termes de ces fonctions.

La modélisation d'une corde élastique vibrante est détaillée en sect. 6.8. La déformation de la corde $y(x, t)$ le long de l'axe des ordonnées au cours du temps est décrite en termes de séries Fourier réelles. Etant donné que la corde est fixés aux extrémités, la série de Fourier est impaire. Les coefficients impaires $b_n(t)$ de chaque mode de vibration décrivent des mouvements harmoniques oscillatoires de pulsations différentes ω_n .

En sect. 6.9, on modélise la dynamique d'une corde élastique initialement pincée. Lorsque que la corde est lâchée sans vitesse initiale, la déformation due au pincement génère une onde acoustique qui se propage le long de la corde. Cette onde est réfléchi aux extrémités. On montre comment le profil de déformation initial $y(x, 0)$ de la corde pincée est exprimée en termes d'une série de Fourier impaire. On en déduit ensuite la propagation de l'onde acoustique en exprimant l'évolution temporelle de la déformation de la corde en termes d'une autre série de Fourier impaire.

6.2 Séries de Fourier réelles

A titre d'illustration de séries de Fourier réelles, on considère d'abord une fonction en dents de scie, qui est une fonction impaire continue par morceaux de période 2π . Le développement en série de Fourier de cette fonction impaire est une combinaison linéaire des fonctions

impaires $\sin nx$ sur l'intervalle $x \in [-\pi, \pi]$ qui s'écrit (Fig. 6.1),

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \quad (6.1)$$

A présent, on considère une fonction en escalier, qui est une fonction impaire continue par

FIGURE 6.1 Animation des $n = 5$ premiers termes du développement en série de Fourier réelle de la fonction en dents de scie. La fonction résultante en rouge.

morceaux de période 2π . Le développement en série de Fourier de cette fonction impaire est une combinaison linéaire des fonctions impaires $\sin(2n+1)x$ sur l'intervalle $x \in [-\pi, \pi]$ qui s'écrit (Fig. 6.2),

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad (6.2)$$

La démonstration des développements en séries de Fourier (6.1) et (6.2) est laissée en

FIGURE 6.2 Animation des $n = 5$ premiers termes du développement en série de Fourier réelle de la fonction en dents de scie. La fonction résultante en vert.

exercice. Plus le nombre n de fonctions sinusoidales impaires $\sin nx$ et $\sin(2n+1)x$ dans les développements en séries de Fourier des fonctions en dents de scie (6.1) et en escalier (6.2) est grand meilleures seront les approximations de ces fonctions. Toute fonction $f(x)$ à valeurs réelles peut être écrite comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire,

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)). \quad (6.3)$$

La fonction paire peut être développée en série de fonctions orthogonales $\cos nx$ et la fonction impaire peut être développée en série de fonctions orthogonales $\sin nx$. On obtient alors le développement en série de Fourier réelle de la fonction,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (6.4)$$

où a_0 et a_n sont les coefficients de Fourier paires et b_n , où $n \in \mathbb{N}^*$, sont les coefficients de Fourier impaires. Compte tenu des propriétés des fonctions sinusoidales,

$$\cos(nx) = \cos(-nx) \quad \text{et} \quad \sin(nx) = -\sin(-nx), \quad (6.5)$$

en généralisant les coefficients à l'ensemble des nombres entiers $n \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante,

$$a_{-n} = a_n \quad \text{et} \quad b_{-n} = -b_n, \quad (6.6)$$



Joseph Fourier

la série de Fourier réelle (6.4) peut être écrite comme une série de Laurent,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (6.7)$$

Une fonction continue par morceaux $f(x)$ est discontinue en un ensemble de points. Si $x = x_0$ est une discontinuité de la fonction alors,

$$f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0 - \varepsilon)). \quad (6.8)$$

Afin qu'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles $f(x)$ admette un développement en série de Fourier réelle, il faut que ses discontinuités satisfassent les trois conditions de Dirichlet,

- 1 Il existe un nombre fini de discontinuités finies dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- 2 Il existe un nombre fini de maxima et de minima dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- 3 L'intégrale de la valeur absolue de la fonction $|f(x)|$ converge dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



Johann Peter Gustav
Lejeune Dirichlet

6.3 Relations d'orthogonalité de Fourier réelles

Afin d'obtenir des relations intégrales pour les coefficients Fourier réels a_0 , a_n et b_n où $n \in \mathbb{N}^*$, il est nécessaire d'établir au préalable des relations d'orthogonalité entre les fonctions sinusoidales. L'intégrale de la formule de trigonométrie,

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x), \quad (6.9)$$

sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ s'écrit,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x) \, dx. \quad (6.10)$$

Dans le cas particulier où $m = n$, l'intégrale (6.10) devient,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx \, dx = - \frac{\cos 2nx}{4n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (6.11)$$

Dans le cas particulier où $m \neq n$, l'intégrale (6.10) devient,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\cos(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (6.12)$$

Compte tenu des intégrales (6.11) et (6.12), l'intégrale (6.10) donne la relation d'orthogonalité,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0. \quad (6.13)$$

L'intégrale de la formule de trigonométrie,

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x), \quad (6.14)$$

sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ s'écrit,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx. \quad (6.15)$$

Dans le cas particulier où $m = n$, l'intégrale (6.15) devient,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx + 1) \, dx = \frac{\sin 2nx}{4n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \pi = \pi. \quad (6.16)$$

Dans le cas particulier où $m \neq n$, l'intégrale (6.15) devient,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= -\frac{1}{2} \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} - \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Compte tenu des intégrales (6.16) et (6.17), l'intégrale (6.15) donne la relation d'orthonormalité,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \delta_{mn}. \quad (6.18)$$

L'intégrale de la formule de trigonométrie,

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2} \left(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x \right), \quad (6.19)$$

sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ s'écrit,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x \right) dx. \quad (6.20)$$

Dans le cas particulier où $m = n$, l'intégrale (6.20) devient,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \pi - \frac{\sin 2nx}{4n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \quad (6.21)$$

Dans le cas particulier où $m \neq n$, l'intégrale (6.20) devient,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} = 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Compte tenu des intégrales (6.21) et (6.22), l'intégrale (6.20) donne la relation d'orthonormalité,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \delta_{mn}. \quad (6.23)$$

6.4 Coefficients de Fourier réels

L'intégrale de la série de Fourier réelle de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ s'écrit,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx. \quad (6.24)$$

Compte tenu des intégrales suivantes,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx &= \frac{\sin mx}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \sin m\pi}{m} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx &= -\frac{\cos mx}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned} \quad (6.25)$$

l'intégrale (6.24) divisée par π donne le coefficient de Fourier nul,

$$a_0 = \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx. \quad (6.26)$$

L'intégrale de la série de Fourier réelle de la fonction $f(x) \cos nx$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ s'écrit,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx . \quad (6.27)$$

Compte tenu des relations (6.13), (6.18) et (6.25), l'intégrale (6.27) divisée par π donne les coefficients de Fourier paires a_n ,

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \delta_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx . \quad (6.28)$$

L'intégrale de la série de Fourier réelle de la fonction $f(x) \sin nx$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Compte tenu des relations (6.13), (6.23) et (6.25), l'intégrale (6.27) divisée par π donne les coefficients Fourier impaires b_n ,

$$b_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \delta_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx . \quad (6.30)$$

6.5 Séries de Fourier complexes

La série de Fourier complexe d'une fonction $f(x)$ continue par morceaux peut être déduite de la série de Fourier réelle de cette fonction. En effet, la série de Fourier réelle (6.4) peut être écrite en termes d'exponentielles à arguments imaginaires,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - i b_n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + i b_n) e^{-inx} . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Compte tenu de la relation (6.6) entre les coefficients de Fourier réels, les coefficients de Fourier complexes définis comme,

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) , \quad (6.32)$$

satisfont les propriétés suivantes,

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_{-n} - i b_{-n}) = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) = c_n^* \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{a_0}{2} , \quad (6.33)$$

car $b_0 = 0$. Ainsi, le développement en série (6.31) est la série de Fourier complexe,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} . \quad (6.34)$$

Les exponentielles à argument imaginaire e^{inx} , où $n \in \mathbb{Z}$, forment une base de dimension infinie de fonctions orthogonales à valeurs complexes. Dans le cas particulier où $m = n$, la relation d'orthonormalité complexe s'écrit,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1 . \quad (6.35)$$

Dans le cas particulier où $m \neq n$, la relation d'orthogonalité complexe s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}}{i(m-n)} = \frac{\sin(m-n)\pi}{(m-n)\pi} = 0 . \end{aligned} \quad (6.36)$$

Compte tenu des intégrales (6.35) et (6.36), la relation d'orthonormalité complexe s'écrit,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \delta_{mn}. \quad (6.37)$$

Au vu de la relation d'orthonormalité complexe (6.37), l'intégrale de la série de Fourier complexe de la fonction $f(x) e^{-inx}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ divisée par 2π donne le coefficient complexe c_n ,

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \delta_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} \right) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \end{aligned} \quad (6.38)$$

La relation d'orthonormalité complexe (6.37) permet d'établir le théorème de Parseval qui lie les coefficients réels et complexe,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (6.39)$$

En effet, compte tenu des coefficients complexes (6.32) et (6.33), des séries de Fourier complexes (6.34) ainsi que de la relation d'orthonormalité complexe (6.37), on démontre ce théorème,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) f(x) dx \\ &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_m^* e^{-imx} c_n e^{inx} dx = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad \square \end{aligned} \quad (6.40)$$

En mécanique quantique, ce théorème est par exemple très utile lors du calcul de probabilité de trouver une particule dans un état décrit par la fonction d'onde $f(x) = \psi(x)$.

6.6 Parité des séries de Fourier

Si une fonction $f(x)$ est paire, c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$, sa série de Fourier réelle n'admet pas de fonction impaire $\sin nx$ dans son développement. Ainsi, cette série (6.4) se réduit à,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (6.41)$$

Par parité, les coefficients a_0 et a_n sont définis par une relation intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ au lieu de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ avec un facteur 2,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Si une fonction $f(x)$ est impaire, c'est-à-dire $f(x) = -f(-x)$, sa série de Fourier réelle n'admet pas de fonction paire $\cos nx$ dans son développement. Ainsi, cette série (6.4) se réduit à,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (6.43)$$

Par parité, les coefficients b_n sont définis par une relation intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ au lieu de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ avec un facteur 2,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx. \quad (6.44)$$

6.7 Fonctions périodiques

Les séries de Fourier réelle (6.4) et complexe (6.34) sont définies en termes de l'angle x . Dans la pratique, il est souvent utile d'exprimer ces séries en termes d'une longueur x' qui est une fraction de la demi longueur d'onde L . Le changement de variables s'écrit donc,

$$x = \frac{\pi x'}{L} \quad \text{ainsi} \quad dx = \frac{\pi}{L} dx'. \quad (6.45)$$

La longueur L représente par exemple la longueur d'une corde vibrante maintenue fixe à ses extrémités. A l'aide du changement de variables (6.45), la série de Fourier réelle (6.4) devient,

$$f(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right), \quad (6.46)$$

et les coefficients (6.26), (6.28) et (6.30) s'écrivent,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x') \, dx', \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x') \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \, dx', \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x') \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \, dx'. \end{aligned} \quad (6.47)$$

A l'aide du changement de variables (6.45), la série de Fourier complexe (6.34) devient,

$$f(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{n\pi x'}{L}\right), \quad (6.48)$$

et les coefficients (6.38) s'écrivent,

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x') \exp\left(-i \frac{n\pi x'}{L}\right) \, dx'. \quad (6.49)$$

Compte tenu du changement de variables (6.45), la série de Fourier réelle d'une fonction paire (6.41) devient,

$$f(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right), \quad (6.50)$$

et la série de Fourier réelle d'une fonction impaire (6.43) s'écrit,

$$f(x') = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right). \quad (6.51)$$

6.8 Corde vibrante

En guise d'application des séries de Fourier réelles, on modélise la dynamique d'une corde élastique homogène de longueur au repos L , fixée à ses extrémités et vibrant dans le plan horizontal Oxy . La déformation de la corde est décrite par la coordonnée d'ordonnée $y(x, t)$ en fonction de la coordonnée d'abscisse x et du temps t ,

$$y(x, t) \quad \text{où} \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad t \in [0, \infty). \quad (6.52)$$

Les conditions aux bords de la corde fixée à ses extrémités en tout temps t s'écrivent,

$$y(0, t) = y(L, t) = 0. \quad (6.53)$$

Ces conditions imposent un développement en série de Fourier des fonctions impaires (6.51) de la forme,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (6.54)$$

où l'évolution temporelle est régie par les coefficients de Fourier impairs $b_n(t)$. L'évolution temporelle de la déformation de la corde $y(x, t)$ est donnée par une équation d'onde acoustique,

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (6.55)$$

où c_s est la vitesse de propagation du son le long de la corde (Fig. 6.3). En substituant la

FIGURE 6.3 Animation des $n = 4$ premiers modes de vibration d'une corde homogène fixée aux extrémités.

série de Fourier impaire (6.54) dans l'équation d'onde de la corde vibrante (6.55), on obtient l'équation différentielle temporelle suivante,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t) + \frac{1}{c_s^2} \ddot{b}_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0. \quad (6.56)$$

Etant donné que les fonctions impaires $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ sont orthogonales, les préfacteurs doivent s'annuler, ce qui implique que chaque mode de vibration n est décrit par un oscillateur harmonique de la forme,

$$\ddot{b}_n(t) + \omega_n^2 b_n(t) = 0, \quad (6.57)$$

de pulsation,

$$\omega_n = \frac{n\pi c_s}{L}. \quad (6.58)$$

On en conclut alors que l'évolution temporelle des coefficients de Fourier impairs est de la forme générale suivante,

$$b_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t), \quad (6.59)$$

où les coefficients A_n et B_n ne dépendent pas du temps. Compte tenu de la relation (6.59), la série de Fourier impaire décrivant la déformation de la corde (6.54) devient,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (6.60)$$

Afin d'obtenir des relations intégrales pour les coefficients A_n et B_n , on va à présent utiliser les conditions initiales imposées sur la déformation et la vitesse de déformation. Au temps initial $t = 0$, la déformation (6.60) s'écrit,

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (6.61)$$

A l'aide du changement de variable $x \rightarrow \pi x/L$, la relation d'orthonormalité (6.23) intégrée sur la longueur $[0, L]$ devient,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}, \quad (6.62)$$

ou de manière équivalente au vu de la parité du produit des fonctions sinus, elle est remise en forme comme,

$$\frac{1}{2L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}. \quad (6.63)$$

Compte tenu de la déformation initiale (6.61) et de la relation d'orthonormalité (6.63), les coefficients A_n s'écrivent,

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \delta_{mn} = \frac{1}{2L} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned} \quad (6.64)$$

La vitesse de déformation est la dérivée temporelle de la déformation (6.60),

$$v_y(x, t) = \dot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left(B_n \cos(\omega_n t) - A_n \sin(\omega_n t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (6.65)$$

Au temps initial $t = 0$, la vitesse de déformation (6.65) s'écrit,

$$v_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (6.66)$$

Compte tenu de la vitesse de déformation initiale (6.61) et de la relation d'orthonormalité (6.63), les coefficients B_n s'écrivent,

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \delta_{mn} = \frac{1}{2L\omega_n} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L v_y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned} \quad (6.67)$$

6.9 Corde pincée

A présent, on va modéliser la dynamique d'une corde vibrante de longueur au repos L , homogène et élastique qui est initialement pincée, de sorte que le point de coordonnée d'abscisse $x = d < L/2$ subit une déformation d'une distance h le long de l'axe des ordonnées (Fig. 6.4),

$$y(d, 0) = h. \quad (6.68)$$

Cette corde peut par exemple être une corde de piano, de guitare ou de violon. Initialement,

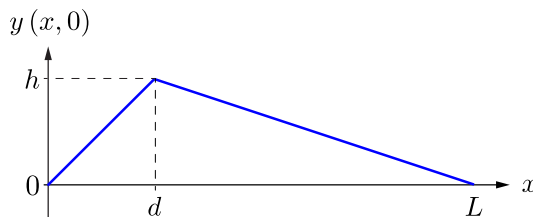


FIGURE 6.4 Profil de déformation initiale $y(x, 0)$ d'une corde pincée homogène de longueur au repos L .

dans les intervalles $[0, d]$ et $[d, L]$, la corde est tendue. Ainsi, son profil de déformation initiale s'écrit,

$$y(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{d} h & \text{si } 0 \leq x \leq d, \\ \frac{L-x}{L-d} h & \text{si } d \leq x \leq L. \end{cases} \quad (6.69)$$

La corde pincée est initialement au repos, puis elle est lâchée sans vitesse initiale au temps $t = 0$. Ceci se traduit par une vitesse de déformation initiale (6.66) nulle,

$$v_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \quad \text{ainsi} \quad B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (6.70)$$

Par conséquent, la déformation de la corde pincée (6.60) se réduit à,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t), \quad (6.71)$$

Compte tenu de la déformation initiale (6.69) de la corde pincée, les coefficients pairs (6.67) s'écrivent,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^d \frac{x}{d} h \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_d^L \frac{L-x}{L-d} h \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (6.72)$$

A l'aide du changement de variable,

$$z = \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ainsi} \quad dz = \frac{n\pi}{L} dx, \quad (6.73)$$

l'expression intégrale (6.72) des coefficients pairs A_n devient,

$$A_n = \frac{2hL}{n^2\pi^2 d} \int_0^{\frac{n\pi d}{L}} z \sin z dz + \frac{2hL}{n\pi(L-d)} \int_{\frac{n\pi d}{L}}^{\frac{n\pi L}{L}} \sin z dz - \frac{2hL}{n^2\pi^2(L-d)} \int_{\frac{n\pi d}{L}}^{\frac{n\pi L}{L}} z \sin z dz. \quad (6.74)$$

A l'aide de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^b z \sin z dz &= -z \cos z \Big|_a^b + \int_a^b \cos z dz = -z \cos z \Big|_a^b + \sin z \Big|_a^b \\ &= a \cos a - \sin a + \sin b - b \cos b, \end{aligned} \quad (6.75)$$

la solution de l'expression intégrale (6.74) des coefficients pairs A_n s'écrit,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2hL}{n^2\pi^2 d} \left(\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) - \frac{n\pi d}{L} \cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \right) \\ &\quad - \frac{2hL}{n\pi(L-d)} \left(\cos\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \right) \\ &\quad + \frac{2hL}{n^2\pi^2(L-d)} \left(\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) - \frac{n\pi d}{L} \cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \right) \\ &\quad - \frac{2hL}{n^2\pi^2(L-d)} \left(\sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - \frac{n\pi L}{L} \cos\left(\frac{n\pi L}{L}\right) \right) \end{aligned} \quad (6.76)$$

Elle est remise en forme comme,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2hL}{n^2\pi^2 d} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) + \frac{2hL}{n^2\pi^2(L-d)} \left(\sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \right) - \frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \\ &\quad + \frac{2hL}{n\pi(L-d)} \cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right) - \frac{2hd}{n\pi(L-d)} \cos\left(\frac{n\pi d}{L}\right). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Finalement, elle se réduit à,

$$A_n = \frac{2h}{n^2\pi^2} \frac{L^2}{L(L-d)} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right). \quad (6.78)$$

Compte tenu de l'expression (6.78) des coefficients pairs A_n , le profil de déformation initiale (6.71) devient (Fig. 6.5),

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{n^2\pi^2} \frac{L^2}{L(L-d)} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (6.79)$$

FIGURE 6.5 Animation des $n = 30$ premiers termes du développement en série de Fourier réelle de la déformation initiale de la corde pincée. Le profil résultant de la corde est en gras.

© Dan Russell 2012

Compte tenu de l'expression (6.78) des coefficients pairs A_n , l'évolution temporelle de la déformation (6.71) devient (Fig. 6.6),

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{n^2\pi^2} \frac{L^2}{L(L-d)} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t). \quad (6.80)$$

L'évolution de la corde pincée initialement en $x = d < L/2$ donne lieu à une onde qui se propage dans la direction positive de l'axe des abscisses. Lorsque la déformation maximale atteint sa valeur maximale le long de l'axe des abscisses, elle est réfléchiée dans la direction négative de cet axe (Fig. 6.7). Lorsque la déformation maximale atteint sa valeur minimale le long de l'axe des abscisses, elle est à nouveau réfléchiée dans la direction positive de cet axe, et ainsi de suite ...



Daniel A. Russell

FIGURE 6.6 Animation des $n = 100$ premiers termes du développement en série de Fourier réelle de l'évolution temporelle de la déformation de la corde pincée. Le profil résultant de la corde est en noir.

© Dan Russell 2012

FIGURE 6.7 Film de la propagation d'une onde générée par une corde pincée qui se réfléchit de manière périodique aux extrémités.
© Dan Russell 2012

Il est éclairant d'illustrer graphiquement le mouvement périodique le long de l'axe des ordonnées d'un point de la corde au voisinage de la déformation maximale (Fig. 6.8).

FIGURE 6.8 Animation du mouvement d'un point en noir de la corde en bleu avec une représentation graphique de l'évolution temporelle périodique de la coordonnée d'ordonnée de ce point.
© Dan Russell 2012

Transformations de Fourier

7.1 Introduction

Les transformations de Fourier sont des transformations intégrales bijectives qui envoient des fonctions f sur d'autres fonctions g à valeurs complexes. Elles sont caractérisées par des opérateurs intégrales linéaires \mathcal{L} dont le noyau K est une exponentielle à argument imaginaire. Elles jouent un rôle très important en physique et en ingénierie car elles permettent de résoudre plus simplement des équations différentielles. Les transformations de Fourier temporelles permettent de décomposer un signal sonore dans l'espace réciproque fréquentiel en termes des intensités des fréquences ν , ou plutôt des pulsations ω , qui le composent. Elles sont donc très importantes en traitement du signal, notamment en acoustique. Les transformations de Fourier spatiales permettent de décomposer une onde dans l'espace réciproque de phase en termes des intensités des nombres d'onde k qui la décrivent. Elles sont donc très importantes en électromagnétisme, notamment en optique.

Les transformations intégrales envoient une fonction f de l'espace direct sur une fonction g de l'espace réciproque. Elles sont décrites à l'aide d'un opérateur intégral linéaire \mathcal{L} défini par un noyau donné en sect 7.2. Ces transformations sont décrites dans l'espace à une dimension, $\mathcal{L} : f(x) \mapsto g(x)$ et dans l'espace à trois dimensions, $\mathcal{L} : f(\mathbf{r}) \mapsto g(\mathbf{r})$. Les transformations intégrales les plus importantes sont les transformations de Fourier décrites par l'opérateur intégral linéaire $\mathcal{F} : f \mapsto \tilde{f}$ où $g = \tilde{f}$. Les propriétés des transformations de Fourier temporelle, $\mathcal{F} : f(t) \mapsto \tilde{f}(\omega)$, spatiale à une dimension $\mathcal{F} : f(x) \mapsto \tilde{f}(k)$ et spatiale à trois dimensions $\mathcal{F} : f(\mathbf{r}) \mapsto \tilde{f}(\mathbf{k})$ sont examinées en sect. 7.3 et 7.4. Dans l'espace réciproque fréquentiel ou l'espace réciproque de phase, les dérivées des fonctions sont transformées en produit qui fait intervenir la pulsation ω ou le nombre d'onde k respectivement comme montré en sect. 7.5. La résolution d'une équation différentielle dans l'espace réciproque se réduit donc à un calcul algébrique simple comme on va le montrer pour un oscillateur harmonique amorti forcé en sect. 7.6. Dans cette application physique, on détermine la transformée de Fourier de la fonction de Green $\tilde{G}(\omega)$ dans l'espace réciproque fréquentiel à l'aide d'un calcul algébrique. Par une transformation de Fourier inverse, on obtient alors la fonction de Green $G(t - t')$. Afin de résoudre cette relation intégrale, on définit une intégrale de contour et on applique le théorème des résidus. On obtient alors une fonction de Green pour le régime d'amortissement faible et une autre pour le régime d'amortissement fort. On peut en déduire la déformation qui est le produit de convolution entre la fonction de Green $G(t - t')$ et une force d'entraînement quelconque $f(x')$. En régime d'amortissement faible, pour une force d'entraînement périodique $f(x') = m a_0 \sin(\omega' t)$, on montre alors en sect. 7.7 qu'au voisinage de la résonance, c'est-à-dire $\omega \simeq \omega'$, la déformation est décrite initialement par un régime transitoire et finalement par un régime stationnaire.

7.2 Transformations intégrales

Une transformation intégrale, décrite par un opérateur intégral linéaire \mathcal{L} , est une intégrale paramétrique sur un espace fonctionnel caractérisée par un noyau K , appelé "kernel" en anglais. L'image d'une fonction f par un tel opérateur est donc une autre fonction g , dont le domaine n'est pas nécessairement le même. Ces opérateurs intégraux sont fondamentaux en

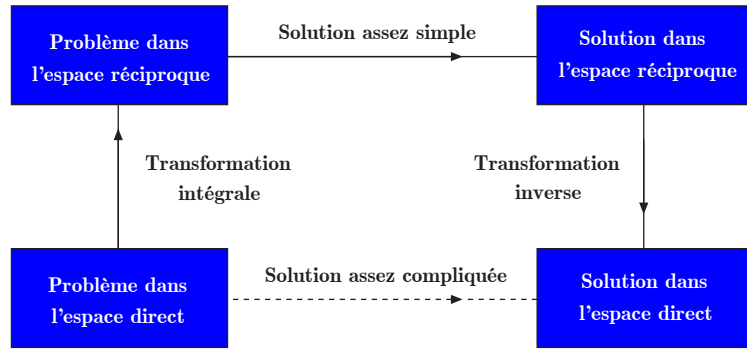


FIGURE 7.1 Solution assez compliquée d'une équation différentielle dans l'espace direct transformée en une solution plus simple dans l'espace réciproque grâce à une transformation intégrale.

analyse fonctionnelle. Ils permettent notamment de transformer une équation différentielle difficile à résoudre en une version dont la résolution est à priori plus aisée (Fig. 7.1). Les exemples les plus simples et les plus utiles en physique et en ingénierie sont les transformées de Laplace et de Fourier. La transformation intégrale envoyant la fonction $f(x)$, définie sur l'intervalle $[a, b]$, sur la fonction $g(x)$ est décrite par l'opérateur intégral linéaire $\mathcal{L} : f(x) \mapsto g(k)$,

$$g(k) = \mathcal{L} f(x) = \int_a^b f(x) K(x, k) dx. \quad (7.1)$$

La transformation intégrale envoyant la fonction $f(\mathbf{r})$, définie sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^3$, sur la fonction $g(\mathbf{k})$ est décrite par l'opérateur intégral linéaire $\mathcal{L} : f(\mathbf{r}) \mapsto g(\mathbf{k})$,

$$g(\mathbf{k}) = \mathcal{L} f(\mathbf{r}) = \iiint_{D \subset \mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3 r. \quad (7.2)$$

La transformation de Laplace est une transformation intégrale envoyant la fonction $f(t)$, définie sur l'intervalle $[0, \infty)$, sur la fonction $F(s)$ qui est décrite par l'opérateur intégral linéaire $\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(s)$,

$$F(s) = \mathcal{L} f(t) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (7.3)$$

où le noyau intégral est une exponentielle à argument réel,

$$K(t, s) = e^{-st}. \quad (7.4)$$

La version complexe de la transformation de Laplace est la transformation de Fourier. La transformation de Fourier temporelle est une transformation intégrale envoyant la fonction $f(t)$, définie sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, sur la fonction $\tilde{f}(\omega)$ qui est décrite par l'opérateur intégral linéaire $\mathcal{F} : f(t) \mapsto \tilde{f}(\omega)$,

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (7.5)$$

où le noyau intégral est une exponentielle à argument imaginaire,

$$K(t, \omega) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (7.6)$$

ω est une pulsation et $1/\sqrt{2\pi}$ est un facteur de normalisation. La transformation de Fourier spatiale à une dimension est une transformation intégrale envoyant la fonction $f(x)$, définie sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, sur la fonction $\tilde{f}(k)$ qui est décrite par l'opérateur intégral linéaire $\mathcal{F} : f(x) \mapsto \tilde{f}(k)$,

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (7.7)$$



Pierre-Simon de Laplace

où le noyau intégral est une exponentielle à argument imaginaire dont le signe est l'opposé de celui de la transformation temporelle,

$$K(x, k) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (7.8)$$

k est un nombre d'onde et $1/\sqrt{2\pi}$ est un facteur de normalisation. La transformation de Fourier spatiale à trois dimensions est une transformation intégrale envoyant la fonction $f(\mathbf{r})$, définie sur le domaine \mathbb{R}^3 , sur la fonction $\tilde{f}(\mathbf{k})$ qui est décrite par l'opérateur intégral linéaire $\mathcal{F} : f(\mathbf{r}) \mapsto \tilde{f}(\mathbf{k})$,

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F} f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \quad (7.9)$$

où le noyau intégral est une exponentielle à argument imaginaire,

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (7.10)$$

\mathbf{k} est un vecteur d'onde et $1/(2\pi)^{3/2}$ est un facteur de normalisation.



Joseph Fourier

7.3 Transformations de Fourier à une dimension

La transformation de Fourier spatiale à une dimension est bijective,

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(x) = f(x). \quad (7.11)$$

L'inverse de la transformation de Fourier spatiale à une dimension envoie la fonction $\tilde{f}(k)$ sur la fonction $f(x)$. Elle est décrite par l'opérateur intégral linéaire inverse $\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(k) \mapsto f(x)$,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (7.12)$$

Compte tenu de la transformation de Fourier (7.7) et de son inverse (7.12), la bijection (7.11) s'écrit,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(x) &= \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(k) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk \right) dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Au vu de la dernière égalité (7.13), on en déduit la représentation intégrale de la distribution de Dirac spatiale à une dimension,

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk. \quad (7.14)$$

La représentation intégrale (7.14) permet d'établir deux propriétés importantes de la distribution de Dirac spatiale à une dimension. La première est sa parité,

$$\delta(x-x') = \delta(x'-x), \quad (7.15)$$

et la deuxième qui en résulte est sa réalité,

$$\delta^*(x-x') = \delta(x-x'). \quad (7.16)$$

La transformation de Fourier (7.7) d'une distribution de Dirac spatiale à une dimension est une exponentielle à argument imaginaire,

$$\mathcal{F} \delta(x-x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (7.17)$$

Par conséquent, la transformation de Fourier inverse (7.12) d'une exponentielle à argument imaginaire est une distribution de Dirac spatiale à une dimension,

$$\mathcal{F}^{-1} e^{-ikx'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \sqrt{2\pi} \delta(x-x'). \quad (7.18)$$

La transformation de Fourier temporelle est bijective,

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(t) = f(t). \quad (7.19)$$

L'inverse de la transformation de Fourier temporelle envoie la fonction $\tilde{f}(\omega)$ sur la fonction $f(t)$. Elle est décrite par l'opérateur intégral linéaire inverse $\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\omega) \mapsto f(t)$,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7.20)$$

Compte tenu de la transformation de Fourier (7.5) et de son inverse (7.20), la bijection (7.19) s'écrit,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(t) &= \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega t'} dx' \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt' \right) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t-t') dt' = f(t). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Au vu de la dernière égalité (7.21), on en déduit la représentation intégrale de la distribution de Dirac temporelle,

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \quad (7.22)$$

La représentation intégrale (7.22) permet d'établir deux propriétés importantes de la distribution de Dirac temporelle. La première est sa parité,

$$\delta(t-t') = \delta(t'-t), \quad (7.23)$$

et la deuxième qui en résulte est sa réalité,

$$\delta^*(t-t') = \delta(t-t'). \quad (7.24)$$

La transformation de Fourier (7.5) d'une distribution de Dirac temporelle est une exponentielle à argument imaginaire,

$$\mathcal{F} \delta(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') e^{i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (7.25)$$

Par conséquent, la transformation de Fourier inverse (7.20) d'une exponentielle à argument imaginaire est une distribution de Dirac temporelle,

$$\mathcal{F}^{-1} e^{i\omega t'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega = \sqrt{2\pi} \delta(t-t'). \quad (7.26)$$

7.4 Transformations de Fourier à trois dimensions

La transformation de Fourier spatiale à trois dimensions est bijective,

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}). \quad (7.27)$$

L'inverse de la transformation de Fourier spatiale à trois dimensions envoie la fonction $\tilde{f}(\mathbf{k})$ sur la fonction $f(\mathbf{r})$. Elle est décrite par l'opérateur intégral linéaire inverse $\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\mathbf{k}) \mapsto f(\mathbf{r})$,

$$f(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k. \quad (7.28)$$

Compte tenu de la transformation de Fourier (7.9) et de son inverse (7.28), la bijection (7.27) s'écrit,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(\mathbf{r}) &= \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3r' \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3r' \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \\
&= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k \right) d^3r' \\
&= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3r' = f(\mathbf{r}) .
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Au vu de la dernière égalité (7.29), on en déduit la représentation intégrale de la distribution de Dirac spatiale à trois dimensions,

$$\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k . \tag{7.30}$$

La représentation intégrale (7.30) permet d'établir deux propriétés importantes de la distribution de Dirac spatiale à trois dimensions. La première est sa parité,

$$\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) , \tag{7.31}$$

et la deuxième qui en résulte est sa réalité,

$$\delta^{3*}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') . \tag{7.32}$$

La transformation de Fourier (7.9) d'une distribution de Dirac spatiale à trois dimensions est une exponentielle à argument imaginaire,

$$\mathcal{F} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} . \tag{7.33}$$

Par conséquent, la transformation de Fourier inverse (7.28) d'une exponentielle à argument imaginaire est une distribution de Dirac spatiale à trois dimensions,

$$\mathcal{F}^{-1} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k = (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') . \tag{7.34}$$

7.5 Transformations de Fourier de dérivées

La dérivée spatiale d'une fonction $f(x)$ exprimée comme l'inverse de transformée de Fourier spatiale à une dimension de la fonction $\tilde{f}(k)$ prend la forme d'un produit de ik ,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (ik \tilde{f}(k)) e^{ikx} dk . \tag{7.35}$$

Par conséquent, sa dérivée spatiale seconde s'écrit,

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-k^2 \tilde{f}(k)) e^{ikx} dk . \tag{7.36}$$

La dérivée temporelle d'une fonction $f(t)$ exprimée comme l'inverse de transformée de Fourier temporelle de la fonction $\tilde{f}(\omega)$ prend la forme d'un produit de $-i\omega$,

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega \tilde{f}(\omega)) e^{-i\omega t} d\omega . \tag{7.37}$$

Par conséquent, sa dérivée temporelle seconde s'écrit,

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) (t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 \tilde{f}(\omega)) e^{-i\omega t} d\omega . \tag{7.38}$$

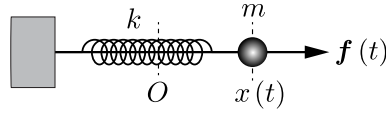


FIGURE 7.2 Oscillateur harmonique forcé constitué d'un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante élastique k soumis à une force d'entraînement $\mathbf{f}(t)$.

Le gradient d'une fonction $f(\mathbf{r})$ exprimée comme l'inverse de transformée de Fourier spatiale à trois dimensions de la fonction $\tilde{f}(\mathbf{k})$ prend la forme d'un produit de $i\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{r}) &= \nabla \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} (i\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k.\end{aligned}\quad (7.39)$$

Par conséquent, son laplacien s'écrit,

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} (-\mathbf{k}^2 \tilde{f}(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k.\quad (7.40)$$

7.6 Oscillateur harmonique forcé

Comme application des transformations de Fourier, on va résoudre l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique forcé à une dimension en présence de frottement. L'équation du mouvement est une équation différentielle ordinaire, linéaire, inhomogène du deuxième ordre. En passant de l'espace direct à l'espace réciproque de Fourier, les dérivées temporelles deviennent des produits de $-i\omega$ ce qui permet de résoudre l'équation différentielle de manière plus directe. On considère donc un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante élastique k soumis à une force élastique $\mathbf{f}_e(t)$, à une force de frottement visqueux $\mathbf{f}_f(t)$ et à une force d'entraînement $\mathbf{f}(t)$ (Fig. 7.2),

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_e(t) &= -k \mathbf{x}(t) = -k x(t) \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{f}_f(t) &= -b \mathbf{v}(t) = -b \dot{x}(t) \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{f}(t) &= f(t) \hat{\mathbf{x}},\end{aligned}\quad (7.41)$$

où le point matériel oscille uniquement selon l'axe horizontal des abscisses de vecteur unitaire $\hat{\mathbf{x}}$. L'équation du mouvement du point matériel est exprimée en termes de la déformation $x(t)$ et de ses dérivées première $\dot{x}(t)$ et seconde $\ddot{x}(t)$ comme,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} f(t),\quad (7.42)$$

où la pulsation naturelle ω_0 et le facteur de frottement γ sont définis comme,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{b}{2m}.\quad (7.43)$$

L'équation différentielle du mouvement (7.42) est une équation linéaire qui peut être écrite en termes de l'opérateur différentiel linéaire,

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2,\quad (7.44)$$

de la manière suivante,

$$\mathcal{L} x(t) = \frac{1}{m} f(t).\quad (7.45)$$

Pour une force d'entraînement ponctuelle au temps $t = t'$ de la forme,

$$f(t) = m v_0 \delta(t - t'),\quad (7.46)$$

où $v_0 = \text{cste}$, l'équation du mouvement (7.46) devient,

$$\mathcal{L}x(t) = v_0 \delta(t - t'). \quad (7.47)$$

L'équation de Green s'écrit,

$$\mathcal{L}G(t - t') = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t - t') = \delta(t - t'). \quad (7.48)$$

La solution de l'équation différentielle (7.46) est le produit de convolution entre la fonction de Green $G(t - t')$ et la force d'entraînement $f(t')$,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}f(t) = \frac{1}{m}(G * f)(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G(t - t') f(t') dt'. \quad (7.49)$$

En effet, compte tenu de l'équation de Green (7.48),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x(t) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x(t) \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t - t') f(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t \delta(t - t') f(t') dt' = \frac{1}{m} f(t). \quad \square \end{aligned} \quad (7.50)$$

Afin de résoudre l'équation différentielle du mouvement (7.42), on effectue une transformation de Fourier temporelle inverse de l'équation de Green (7.48) pour pouvoir l'exprimer dans l'espace de Fourier temporel réciproque. La transformation inverse de la fonction de Green s'écrit,

$$G(t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (7.51)$$

où $\tilde{G}(\omega)$ est la transformée de Fourier temporelle de la fonction de Green $G(t - t')$. Compte tenu de la transformation de Fourier temporelle inverse de l'équation de Green (7.51) et de la représentation intégrale de la distribution de Dirac temporelle (7.22), l'équation de Green temporelle (7.48) est mise sous forme intégrale,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \quad (7.52)$$

Compte tenu des dérivées temporelles première (7.37) et seconde (7.38) et du fait que la transformée de Fourier temporelle de la fonction de Green $\tilde{G}(\omega)$ est indépendante du temps, la relation intégrale de Green (7.52) devient,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7.53)$$

En identifiant les intégrands de la relation intégrale de Green (7.53),

$$(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t'}, \quad (7.54)$$

on détermine la transformée de Fourier temporelle de la fonction de Green dans l'espace de Fourier temporel réciproque,

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega t'}}{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2}. \quad (7.55)$$

Le dénominateur de la transformée de Fourier temporelle de la fonction de Green peut être factorisé comme,

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega t'}}{(\omega - \omega_+) (\omega - \omega_-)}, \quad (7.56)$$

où les pôles simples complexes s'écrivent,

$$\omega_{\pm} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (7.57)$$

En substituant la transformée de Fourier temporelle de la fonction de Green (7.56) dans la transformation de Fourier inverse (7.51), on obtient une expression intégrale pour la fonction de Green,

$$G(t - t') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} d\omega. \quad (7.58)$$

Afin de déterminer la fonction de Green $G(t - t')$, on remplace l'intégrale (7.58) par une intégrale de contour le long d'un chemin fermé \mathcal{C} dans le plan complexe \mathbb{C} pour la variable complexe w , telle que $\omega = \text{Re}(w)$,

$$G(t - t') = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{-iw(t-t')}}{(w - w_+)(w - w_-)} dw, \quad (7.59)$$

qui peut être remise en forme comme,

$$G(t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\mathcal{C}} \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw. \quad (7.60)$$

Afin de déterminer le contour \mathcal{C} à choisir, on applique le lemme de Jordan,

$$\begin{aligned} \lim_{|w| \rightarrow \infty} \left| \frac{w \tilde{G}(w) e^{-iwt}}{\sqrt{2\pi}} \right| &= \lim_{|w| \rightarrow \infty} \left| \frac{w e^{-iw(t-t')}}{\sqrt{2\pi}(w - w_+)(w - w_-)} \right| = \\ &= \lim_{|w| \rightarrow \infty} \left| \frac{w e^{-i \text{Re}(w)(t-t')} e^{\text{Im}(w)(t-t')}}{2\pi(w - w_+)(w - w_-)} \right| = 0. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Ainsi, on choisit un contour fermé \mathcal{C} constitué d'un intervalle $[-R, R]$ et d'un arc de cercle Γ dans le plan inférieur de rayon R orientés dans le sens horaire et que l'arc de cercle se trouve dans le demi plan inférieur (Fig. 7.3) et on fait tendre le rayon $R \rightarrow \infty$. Afin que le lemme de Jordan (7.61) soit satisfait lorsque $t > t'$, il faut que le contour soit parcouru dans le sens horaire et qu'il se trouve dans le demi-plan complexe inférieur,

$$\text{Im}(w) \leq 0. \quad (7.62)$$

Compte tenu du lemme de Jordan, dans la limite où le rayon diverge, c'est-à-dire $R \rightarrow \infty$,

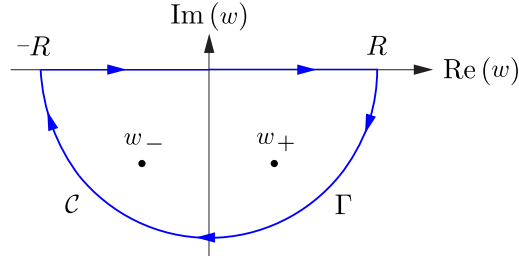


FIGURE 7.3 Intégrale de contour le long du chemin fermé \mathcal{C} .

l'intégrale le long de l'arc de cercle s'annule et l'intégrale de contour \mathcal{C} se réduit à l'intégrale sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw. \end{aligned} \quad (7.63)$$

La fonction à valeurs complexes $\tilde{G}(w) e^{-iwt}$ a deux pôles simples en $w = w_+$ et en $w = w_-$. Par conséquent, les deux résidus sont,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{w=w_+} \tilde{G}(w) e^{-iwt} &= \lim_{w \rightarrow w_+} -\frac{(w - w_+) e^{-iw(t-t')}}{\sqrt{2\pi}(w - w_+)(w - w_-)} = -\frac{e^{-iw_+(t-t')}}{\sqrt{2\pi}(w_+ - w_-)} \\ \text{Res}_{w=w_-} \tilde{G}(w) e^{-iwt} &= \lim_{w \rightarrow w_-} -\frac{(w - w_-) e^{-iw(t-t')}}{\sqrt{2\pi}(w - w_+)(w - w_-)} = \frac{e^{-iw_-(t-t')}}{\sqrt{2\pi}(w_+ - w_-)} \end{aligned} \quad (7.64)$$

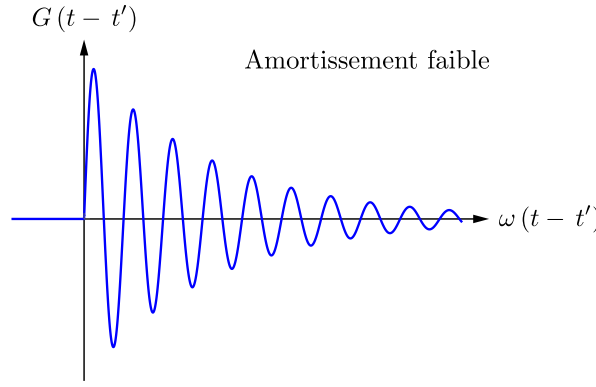


FIGURE 7.4 Fonction de Green temporelle $G(t-t')$, où $t > t'$, d'un oscillateur amorti forcé de pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ en régime d'amortissement faible où $\gamma < \omega_0$.

Par conséquent, le théorème des résidus appliqué à la fonction à valeurs complexes $\tilde{G}(w) e^{-iwt}$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \oint_C \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw &= -2\pi i \sum_{w=\omega_{\pm}} \text{Res} \tilde{G}(w) e^{-iwt} \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{e^{-i\omega_-(t-t')} - e^{-i\omega_+(t-t')}}{i(\omega_+ - \omega_-)} \right), \end{aligned} \quad (7.65)$$

où le signe moins dans le membre de droite est dû au fait que l'intégrale de contour est parcourue dans le sens horaire. Compte tenu du théorème des résidus (7.65) et de la causalité, la fonction de Green (7.60) s'écrit,

$$G(t-t') = \frac{e^{-i\omega_-(t-t')} - e^{-i\omega_+(t-t')}}{i(\omega_+ - \omega_-)} \Theta(t-t'), \quad (7.66)$$

où la fonction de Heaviside $\Theta(t-t')$ rend compte de la causalité. A l'aide des pôles (7.57) dans le demi-plan complexe inférieur,

$$w_{\pm} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (7.67)$$

la fonction de Green (7.68) devient,

$$G(t-t') = e^{-\gamma(t-t')} \left(\frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')} - e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')}}{2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \Theta(t-t'). \quad (7.68)$$

A présent, il convient de distinguer deux régimes : l'amortissement faible lorsque la force élastique l'emporte sur la force de frottement, et l'amortissement fort lorsque la force de frottement l'emporte sur la force élastique. On ne discutera pas ici le cas limite du régime d'amortissement critique qui est de mesure nulle dans la pratique. En régime d'amortissement faible, c'est-à-dire $\gamma < \omega_0$, la pulsation du mouvement harmonique oscillatoire amorti est définie comme,

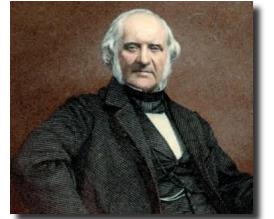
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{si} \quad \gamma < \omega_0, \quad (7.69)$$

et la fonction de Green (7.68) devient alors (Fig. 8.2),

$$G(t-t') = e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\omega} \Theta(t-t') \quad \text{si} \quad \gamma < \omega_0. \quad (7.70)$$

En substituant la fonction de Green (7.70) dans la relation (7.49), on obtient la relation intégrale pour la déformation du ressort soumis à une force d'entraînement quelconque $f(t')$ en régime d'amortissement faible,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega(t-t')) f(t') dt' \quad \text{si} \quad \gamma < \omega_0. \quad (7.71)$$



George Green

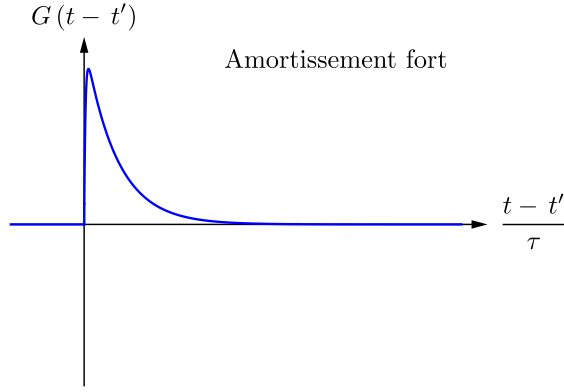


FIGURE 7.5 Fonction de Green temporelle $G(t-t')$, où $t > t'$, d'un oscillateur amorti forcé avec un temps d'amortissement caractéristique $\tau = 1/\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ en régime d'amortissement fort où $\gamma > \omega_0$.

En régime d'amortissement fort, c'est-à-dire $\gamma > \omega_0$, le temps d'amortissement caractéristique est défini comme,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \quad \text{si} \quad \gamma > \omega_0, \quad (7.72)$$

et la fonction de Green (7.68) devient alors (Fig. 8.3),

$$G(t-t') = e^{-\gamma(t-t')} \tau \sinh\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) \Theta(t-t') \quad \text{si} \quad \gamma > \omega_0. \quad (7.73)$$

En substituant la fonction de Green (7.73) dans la relation (7.49), on obtient la relation intégrale pour la déformation du ressort soumis à une force d'entraînement quelconque $f(t')$ en régime d'amortissement fort,

$$x(t) = \frac{\tau}{m} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sinh\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) f(t') dt' \quad \text{si} \quad \gamma > \omega_0. \quad (7.74)$$

7.7 Oscillateur harmonique forcé périodiquement

On considère à présent uniquement le régime d'amortissement faible, où $\gamma < \omega_0$, avec une force d'entraînement périodique d'amplitude $f_0 = m a_0$ de la forme,

$$f(t') = f_0 \sin(\omega' t') = m a_0 \sin(\omega' t') = m a_0 \frac{e^{i\omega' t'} - e^{-i\omega' t'}}{2i}. \quad (7.75)$$

En substituant la force périodique (7.75) dans la déformation (7.71), elle devient,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{\omega} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \left(\frac{e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\omega' t'} - e^{-i\omega' t'}}{2i} \right) dt' \\ &= -\frac{a_0 e^{-(\gamma-i\omega)t}}{4\omega} \int_0^t \left(e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} - e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} \right) dt' \\ &\quad - \frac{a_0 e^{-(\gamma+i\omega)t}}{4\omega} \int_0^t \left(e^{(\gamma-i(\omega'-\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'+\omega))t'} \right) dt' \\ &= \frac{a_0}{4\omega} e^{-(\gamma-i\omega)t} \int_0^t \left(e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \\ &\quad + \frac{a_0}{4\omega} \left(e^{-(\gamma-i\omega)t} \int_0^t \left(e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \right)^*. \end{aligned} \quad (7.76)$$

La somme d'un nombre complexe et de son conjugué complexe est deux fois sa partie réelle. Ainsi, la déformation se réduit à,

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left(e^{-(\gamma-i\omega)t} \int_0^t \left(e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \right). \quad (7.77)$$

!h

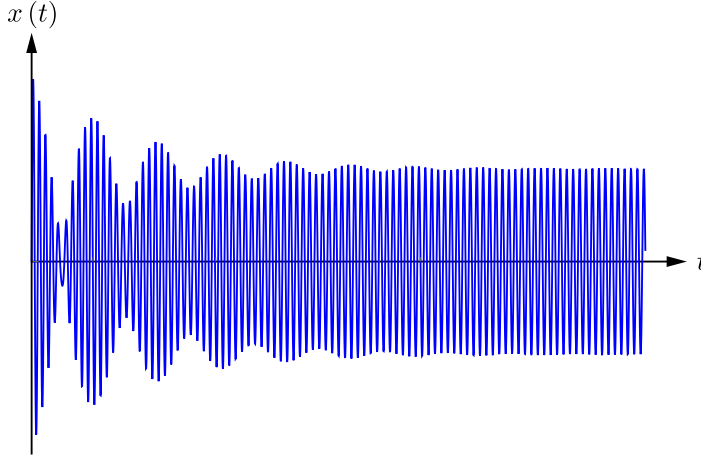


FIGURE 7.6 Evolution temporelle de la déformation $x(t)$ d'un oscillateur harmonique amorti soumis à une force d'entraînement périodique.

La solution de l'intégrale intervenant dans l'expression (7.77) de la déformation est,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \left(e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \\
 &= \frac{e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'}}{\gamma-i(\omega'+\omega)} \Big|_0^t - \frac{e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'}}{\gamma+i(\omega'-\omega)} \Big|_0^t \\
 &= \frac{e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t} - 1}{\gamma-i(\omega'+\omega)} - \frac{e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t} - 1}{\gamma+i(\omega'-\omega)}.
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

Par conséquent, la déformation (7.77) devient,

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\omega't} - e^{-(\gamma-i\omega)t}}{\gamma-i(\omega'+\omega)} - \frac{e^{i\omega't} - e^{-(\gamma-i\omega)t}}{\gamma+i(\omega'-\omega)} \right), \tag{7.79}$$

et elle est remise en forme comme,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left(\frac{(\gamma+i(\omega'+\omega))(e^{-i\omega't} - e^{-(\gamma-i\omega)t})}{(\omega'+\omega)^2 + \gamma^2} \right) \\
 &- \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left(\frac{(\gamma-i(\omega'-\omega))(e^{i\omega't} - e^{-(\gamma-i\omega)t})}{(\omega'-\omega)^2 + \gamma^2} \right).
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Proche de la résonance $\omega \simeq \omega'$, on peut faire l'approximation suivante,

$$\frac{1}{(\omega'+\omega)^2 + \gamma^2} \ll \frac{1}{(\omega'-\omega)^2 + \gamma^2}, \tag{7.81}$$

et alors la déformation (7.80) devient (Fig. 7.6),

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -\frac{a_0}{2\omega} \left(\frac{\gamma \cos(\omega't) + (\omega' - \omega) \sin(\omega't)}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2} \right) \\
 &+ \frac{a_0}{2\omega} e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma \cos(\omega t) - (\omega' - \omega) \sin(\omega t)}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2} \right).
 \end{aligned} \tag{7.82}$$

Au voisinage de la résonance, c'est-à-dire $\omega \simeq \omega'$, l'évolution temporelle (7.82) de la déformation $x(t)$ est régie par un mode de déformation rapide de pulsation $\omega \simeq \omega'$. Cette évolution peut se diviser en deux parties : le régime transitoire et le régime stationnaire. Durant un intervalle de temps de l'ordre de grandeur du temps d'amortissement caractéristique, c'est-à-dire $t \sim \tau$, les interférences entre les oscillations naturelles, de pulsation ω , amorties par le frottement visqueux et les oscillations périodiques, de pulsation ω' , générées par la force d'entraînement périodique donnent lieu à des battements de pulsation lente $\omega - \omega'$ dont

l'amplitude est exponentiellement amortie. Cet amortissement est décrit par le facteur $e^{-\gamma t}$. L'oscillateur harmonique tend ensuite vers un régime stationnaire d'amplitude constante.

Equations différentielles ordinaires

8.1 Introduction

Les équations différentielles sont primordiales en physique car la dynamique est décrite par de telles équations. Etant donné que la dynamique est en général formulée en termes de accélération et de vitesse, qui sont les dérivées seconde et première de la position, les équations différentielles les plus importantes sont des équations différentielles ordinaires du second ordre d'une fonction $y(x)$. Dans le cas général, ces équations différentielles du second ordre ont des coefficients $p_0(x)$ et $p_1(x)$ qui sont fonctions de la variable x et un terme de source $f(x)$ qui les rend inhomogènes.

L'objectif de ce chapitre est d'établir une méthode systématique de résolution des équations différentielles ordinaires inhomogènes du second ordre $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = f(x)$. Pour ce faire, on va d'abord s'intéresser à la résolution des équations différentielles ordinaires homogènes du second ordre $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$ où $f(x)$.

Premièrement à l'aide de la méthode de Frobenius on fait un développement en série de puissances $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j}$ autour de $x = 0$ et on détermine les coefficients a_j . Deuxièmement, la méthode du wronskien permet d'exprimer la deuxième solution $y_2(x)$ de l'équation différentielle homogène en termes de la première $y_1(x)$ à l'aide d'une relation intégrale. Troisièmement, la méthode de Green permet alors de déterminer les solutions particulières $y_p(x)$ de l'équation différentielle inhomogène. A l'aide de cette méthode les fonctions de Green $G(x - x')$ sont exprimées en termes du wronskien $W(x')$ et des solutions de l'équation différentielle homogène $y_1(x)$, $y_1(x')$, $y_2(x)$, $y_2(x')$.

En guise de première application physique, on va établir le développement en séries de puissances des polynômes de Laguerre $L_n(x)$ qui interviennent dans la résolution de la partie radiale de la fonction d'onde de l'atome d'hydrogène. Comme seconde application, on va résoudre efficacement l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique forcé $\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} f(t)$ en présence de frottement visqueux. La méthode du Wronskien permet de déduire la deuxième solution $x_2(t)$ de la première $x_1(t)$. Ensuite, la méthode de Green permet d'obtenir une expression explicite de la fonction de Green temporelle $G(t - t')$ en régime d'amortissement faible où $\gamma < \omega_0$.

8.2 Equations différentielles ordinaires du second ordre

La résolution de nombreux problèmes physiques fait intervenir des équations différentielles ordinaires inhomogènes d'ordre n de la forme,

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = f(x), \quad (8.1)$$

où les coefficients $p_0(x)$, $p_1(x)$, \dots , $p_{n-1}(x)$ et $p_n(x)$ sont des fonctions réelles et $f(x)$ est aussi une fonction réelle qui représente physiquement une source ou une force d'entraînement. Les équations différentielles inhomogènes les plus fréquentes sont celles du 2^e ordre,

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = f(x). \quad (8.2)$$

Dans le cas particulier où il n'y a pas de source, c'est-à-dire $f(x) = 0$, l'équation différentielle (8.2) devient homogène,

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0. \quad (8.3)$$

Le cas le plus simple est celui d'une équation différentielle homogène du deuxième ordre où les coefficients sont constants, c'est-à-dire $p_1(x) = b = \text{cste}$ et $p_0(x) = c = \text{cste}$. Dans ce cas, l'équation différentielle homogène du deuxième ordre (8.3) est,

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \quad (8.4)$$

L'équation différentielle (8.4) lie la fonction $y(x)$ à ses dérivées première $y'(x)$ et seconde $y''(x)$. Les solutions de cette équation sont donc des exponentielles à argument complexe,

$$y(x) = y(0)e^{\lambda x} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8.5)$$

En substituant les solutions (8.5) dans l'équation différentielle (8.3), on obtient l'équation suivante,

$$(\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0. \quad (8.6)$$

Etant donné que l'équation (8.6) doit être vérifiée quelle que soit la valeur finie de $\lambda \in \mathbb{C}$, on en déduit l'équation caractéristique, introduite par Euler,

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (8.7)$$

Les deux solutions l'équation caractéristique sont les suivantes,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c}) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c}). \quad (8.8)$$

Il convient de distinguer deux cas. Dans le premier cas, lorsque le discriminant Δ n'est pas nul, c'est-à-dire $\Delta = b^2 - 4c \neq 0$, les solutions complexes conjuguées et linéairement indépendantes de l'équation différentielle (8.4) sont de la forme,

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{et} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}. \quad (8.9)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle homogène à coefficients constants (8.4) est une combinaison linéaire de ces deux solutions linéairement indépendantes,

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (8.10)$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont fixés par les conditions au bord imposées sur $y(0)$ et $y'(0)$. Dans le deuxième cas, où le discriminant est nul, c'est-à-dire $\Delta = b^2 - 4c = 0$, l'équation différentielle homogène à coefficients constants (8.4) devient,

$$y''(x) + 2b'y'(x) + b'^2 y(x) = 0 \quad \text{où} \quad b' = \sqrt{c} = \frac{b}{2}, \quad (8.11)$$

les coefficients caractéristiques sont confondus,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -b', \quad (8.12)$$

et les solutions sont de la forme,

$$y(x) = g(x)e^{-b'x}, \quad (8.13)$$

où $g(x)$ est une fonction bien choisie. En faisant un développement limité au premier ordre de la fonction $g(x)$ autour de $x = 0$,

$$g(x) = c_1 + c_2 x, \quad (8.14)$$

les solutions sont une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes,

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-b'x} = c_1 e^{-b'x} + c_2 x e^{-b'x}. \quad (8.15)$$

La dérivée première de (8.15) s'écrit,

$$y'(x) = (c_2 - b'(c_1 + c_2 x))e^{-b'x}, \quad (8.16)$$

et la dérivée seconde est,

$$y''(x) = -b' \left(2c_2 - b'(c_1 + c_2 x) \right) e^{-b'x}. \quad (8.17)$$

Compte tenu de la fonction (8.15) et de ces deux premières dérivées (8.16) et (8.17),

$$\begin{aligned} y''(x) + 2b'y'(x) + b'^2 y(x) &= -b' \left(2c_2 - b'(c_1 + c_2 x) \right) e^{-b'x} \\ + 2b' \left(c_2 - b'(c_1 + c_2 x) \right) e^{-b'x} + b'^2 (c_1 + c_2 x) e^{-b'x} &= 0, \end{aligned} \quad (8.18)$$

ce qui démontre que la fonction (8.15) est solution de l'équation différentielle homogène à coefficients constants (8.11). Dans le cas où les coefficients ne sont plus constants, les solutions ne sont pas de simples combinaisons linéaires d'exponentielles de la forme (8.10) ou (8.15). En revanche, la solution générale de l'équation différentielle homogène à coefficients quelconques (8.3) est aussi une combinaison de deux solutions complexes linéaires indépendantes,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (8.19)$$

La solution générale de l'équation différentielle inhomogène à coefficients quelconques (8.3) est la somme de la solution générale $y_h(x)$ de l'équation différentielle homogène (8.4) et d'une solution particulière $y_p(x)$,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x). \quad (8.20)$$

En effet la solution générale $y_h(x)$ satisfait l'équation différentielle homogène (8.3),

$$y_h''(x) + p_1(x) y_h'(x) + p_0(x) y_h(x) = 0, \quad (8.21)$$

alors que la solution particulière $y_p(x)$ satisfait l'équation différentielle inhomogène (8.2),

$$y_p''(x) + p_1(x) y_p'(x) + p_0(x) y_p(x) = f(x). \quad (8.22)$$

On conclut alors que la solution générale (8.20) satisfait l'équation différentielle inhomogène (8.2),

$$\begin{aligned} y''(x) + p_1(x) y'(x) + p_0(x) y(x) \\ = y_h''(x) + p_1(x) y_h'(x) + p_0(x) y_h(x) + y_p''(x) + p_1(x) y_p'(x) + p_0(x) y_p(x) \\ = f(x), \end{aligned} \quad (8.23)$$

comme il se doit.

8.3 Méthode de Frobenius

La méthode de résolution de Frobenius est une méthode de résolution d'une équation différentielle ordinaire homogène du second ordre (8.3). Cette méthode locale est basée sur un développement en série de puissance de la fonction $y(x)$ autour d'une valeur particulière $x = x_0$,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{s+j} \quad \text{où} \quad s \geq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0. \quad (8.24)$$

Dans le cas le plus simple où $x_0 = 0$, le développement en série de puissances (8.24) se réduit à,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j} \quad \text{où} \quad s \geq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0. \quad (8.25)$$

Les polynômes d'Hermite $H_n(x)$, les polynômes de Laguerre $L_n(x)$, les polynômes de Legendre $P_\ell(x)$ et les fonctions de Bessel $J_m(x)$ admettent le développement en série de puissances (8.25) autour de $x = 0$. En substituant ce développement en série de puissances dans



Ferdinand Georg
Frobenius

l'équation différentielle homogène du second ordre (8.3), on obtient l'équation de Frobenius,

$$\begin{aligned} p_2(x) \sum_{j=0}^{\infty} (s+j-1)(s+j) a_j x^{s+j-2} \\ + p_1(x) \sum_{j=0}^{\infty} (s+j) a_j x^{s+j-1} + p_0(x) \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j} = 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Pour les polynômes d'Hermite $H_n(x)$, de Laguerre $L_n(x)$ et de Legendre $P_\ell(x)$, les coefficients $p_k(x) = \mathbb{R}_k[x]$ où $k \in \{0, 1, 2\}$ sont de la forme,

$$p_0(x) = \gamma_0 \quad \text{et} \quad p_1(x) = \beta_1 x + \beta_0 \quad \text{et} \quad p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (8.27)$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \gamma_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation de Frobenius (8.26) devient,

$$\begin{aligned} (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \sum_{j=0}^{\infty} (s+j-1)(s+j) a_j x^{s+j-2} \\ + (\beta_1 x + \beta_0) \sum_{j=0}^{\infty} (s+j-1) a_j x^{s+j-1} + \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j} = 0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

et elle est remise en forme comme,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_0 (s+j-1)(s+j) a_j x^{s+j-2} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_1 (s+j-1)(s+j) + \beta_0 (s+j-1) \right) a_j x^{s+j-1} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_2 (s+j-1)(s+j) + \beta_1 (s+j-1) + \gamma_0 \right) a_j x^{s+j} = 0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

On sort les deux premiers termes de la première somme et on décale l'indice muet de sommation $j \rightarrow j+2$. De plus, on sort le premier terme de la deuxième somme et on décale l'indice muet de sommation $j \rightarrow j+1$. L'équation de Frobenius (8.29) devient,

$$\begin{aligned} \alpha_0 s(s-1) a_0 x^{s-2} + \left((\alpha_1 s + \beta_0)(s-1) a_0 + \alpha_0 s(s+1) a_1 \right) x^{s-1} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_0 (s+j+1)(s+j+2) a_{j+2} x^{s+j} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_1 (s+j)(s+j+1) + \beta_0 (s+j) \right) a_{j+1} x^{s+j} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_2 (s+j-1)(s+j) + \beta_1 (s+j-1) + \gamma_0 \right) a_j x^{s+j} = 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Afin de l'équation de Frobenius (8.30) soit satisfaite, il faut que les facteurs de chaque puissance de x s'annulent. En particulier, il faut que le facteur de x^{s-2} s'annule compte tenu de la condition $a_0 \neq 0$, ce qui donne l'équation indicelle,

$$\alpha_0 s(s-1) = 0. \quad (8.31)$$

Ainsi, si $\alpha_0 \neq 0$, il y a par exemple deux valeurs possibles pour le paramètre $s \in \{0, 1\}$. De plus, il faut que le facteur de x^{s-1} s'annule qui donne une relation entre les coefficients a_0 et a_1 ,

$$(\alpha_1 s + \beta_0)(s-1) a_0 + \alpha_0 s(s+1) a_1 = 0. \quad (8.32)$$

Finalement, le facteur de x^{s+j} s'annule pour tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui donne une relation de récurrence entre les coefficients a_j , a_{j+1} et a_{j+2} ,

$$\begin{aligned} & \alpha_0 (s + j + 1) (s + j + 2) a_{j+2} \\ & + \left(\alpha_1 (s + j) (s + j + 1) + \beta_0 (s + j) \right) a_{j+1} \\ & + \left(\alpha_2 (s + j - 1) (s + j) + \beta_1 (s + j - 1) + \gamma_0 \right) a_j = 0. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Les coefficients a_j , où $j \in \mathbb{N}$, du développement en série de puissances sont déterminés en résolvant le système d'équations (8.31), (8.32) et (8.33).

8.4 Méthode du wronskien

La méthode du wronskien permet de déterminer la seconde solution $y_2(x)$ d'une équation différentielle ordinaire homogène du second ordre (8.3) à l'aide de la première solution $y_1(x)$. La solution générale de cette équation différentielle et sa dérivée première forment le système d'équations,

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \\ y'(x) &= c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x), \end{aligned} \quad (8.34)$$

qui écrit sous la forme matricielle comme,

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Le wronskien $W(x)$ est défini comme le déterminant de la matrice intervenant dans la relation matricielle (8.35),

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \neq 0. \quad (8.36)$$

Etant donné que les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes, les colonnes de la matrice ne sont pas multiples d'une de l'autre ce qui garantit que le wronskien $W(x)$ ne s'annule pas. La dérivée du wronskien s'écrit,

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1'(x) y_2'(x) + y_1(x) y_2''(x) - y_1''(x) y_2(x) - y_1'(x) y_2'(x) \\ &= y_1(x) y_2''(x) - y_1''(x) y_2(x). \end{aligned} \quad (8.37)$$

Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de l'équation différentielle homogène du second ordre (8.3),

$$\begin{aligned} y_1''(x) + p_1(x) y_1'(x) + p_0(x) y_1(x) &= 0, \\ y_2''(x) + p_1(x) y_2'(x) + p_0(x) y_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Compte tenu des équations différentielles (8.38), la dérivée du wronskien devient,

$$\begin{aligned} W'(x) &= -y_1(x) \left(p_1(x) y_2'(x) + p_0(x) y_2(x) \right) \\ &\quad + y_2(x) \left(p_1(x) y_1'(x) + p_0(x) y_1(x) \right) \\ &= -p_1(x) \left(y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \right). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Compte tenu de la définition du wronskien (8.36), la dérivée du wronskien (8.39) satisfait l'équation différentielle suivante,

$$W'(x) = -p_1(x) W(x). \quad (8.40)$$

La primitive de l'équation différentielle ordinaire s'écrit,

$$\ln(W(x)) = \int^{W(x)} \frac{dW(x')}{W(x')} = - \int^x p_1(x') dx', \quad (8.41)$$



Józef Maria
Hoene-Wroński

où x' est une variable muette. Le wronskien s'écrit donc à une constante près comme,

$$W(x) = \exp\left(-\int^x p_1(x') dx'\right). \quad (8.42)$$

Le wronskien (8.36) peut être remis en forme comme,

$$W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = y_1(x)^2 \left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)', \quad (8.43)$$

ce qui implique que,

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{W(x)}{y_1(x)^2}. \quad (8.44)$$

La primitive de l'équation différentielle (8.44) multipliée par la première solution $y_1(x)$ donne une expression intégrale de la deuxième solution $y_2(x)$ en fonction de la première,

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{W(x')}{y_1(x')^2} dx'. \quad (8.45)$$

Par conséquent, si la première solution $y_1(x)$ peut être obtenue par calcul ou simplement devinée, la deuxième solution linéairement indépendante $y_2(x)$ peut alors en être déduite par calcul du wronskien. Dans le cas particulier où $p_1(x') = 0$ alors $W(x') = 1$ et ainsi,

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{dx'}{y_1(x')^2} \quad \text{si} \quad p_1(x') = 0. \quad (8.46)$$

8.5 Méthode de Green

La méthode de Green permet de déterminer les solutions particulières de l'équation différentielle ordinaire inhomogène du second ordre (8.2) en termes des solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation différentielle ordinaire homogène du second ordre (8.3). L'équation différentielle ordinaire inhomogène du second ordre (8.2) est une équation linéaire qui peut être écrite en termes de l'opérateur différentiel linéaire,

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x), \quad (8.47)$$

de la manière suivante,

$$\mathcal{L} y(x) = f(x). \quad (8.48)$$

La solution de cette équation est le produit de convolution entre la fonction de Green $G(x - x')$ et le terme de source $f(x')$,

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1} f(x) = (G * f)(x) = \int^x G(x - x') f(x') dx'. \quad (8.49)$$

Pour une source ponctuelle en $x = x'$ de la forme,

$$f(x) = f_0 \delta(x - x'), \quad (8.50)$$

l'équation de Green s'écrit,

$$\mathcal{L} G(x - x') = \delta(x - x'). \quad (8.51)$$

Compte tenu de l'opérateur différentiel linéaire (8.47), l'équation de Green (8.51) prend la forme explicite suivante,

$$G''(x - x') + p_1(x) G'(x - x') + p_0(x) G(x - x') = \delta(x - x'). \quad (8.52)$$

Compte tenu de la condition de causalité $x > x'$, les solutions de l'équation différentielle homogène de Green sont une combinaison linéaire des solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$,

$$G(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x', \\ A(x') y_1(x) + B(x') y_2(x) & \text{si } x > x', \end{cases} \quad (8.53)$$



George Green

où les coefficients $A(x')$ et $B(x')$ dépendent de x' . Par continuité, la fonction de Green évaluée en $x = x'$ s'annulent,

$$A(x') y_1(x') + B(x') y_2(x') = 0. \quad (8.54)$$

La dérivée de la fonction de Green (8.53) par rapport à x s'écrit,

$$G'(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x', \\ A(x') y_1'(x) + B(x') y_2'(x) & \text{si } x > x', \end{cases} \quad (8.55)$$

Afin de déterminer la dérivée de la fonction de Green $G'(x - x')$ dans la limite où $x \rightarrow x'$, on intègre l'équation de Green (8.52) par rapport à x dans l'intervalle $[x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$ dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} \left(G''(x - x') + p_1(x) G'(x - x') + p_0(x) G(x - x') \right) dx \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} \delta(x - x') dx = 1. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Par continuité de la fonction de Green $G(x - x')$ et du coefficient $p_0(x)$ au voisinage de $x = x'$, l'intégrale du troisième terme du membre de gauche de la relation intégrale (8.56) s'annule,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} p_0(x) G(x - x') dx = 0. \quad (8.57)$$

A l'aide d'une intégration par parties, par continuité de la fonction de Green $G(x - x')$ du coefficient $p_1(x)$ et de sa dérivée $p_1'(x)$ au voisinage de $x = x'$, l'intégrale du second terme du membre de gauche de la relation intégrale (8.56) s'annule,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} p_1(x) G'(x - x') dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_1(x) G(x - x') \Big|_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} \\ - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} p_1'(x) G(x - x') dx = 0. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Compte tenu des intégrales (8.57) et (8.58), la relation intégrale (8.56) se réduit à,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} G''(x - x') dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G'(x - x') \Big|_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} = 1. \quad (8.59)$$

En évaluant la dérivées de la fonction de Green (8.55) dans la limite où $x \rightarrow x'$ compte tenu de l'identité (8.59),

$$A(x') y_1'(x') + B(x') y_2'(x') = 1. \quad (8.60)$$

Le système d'équations (8.54) et (8.60) est mis sous la forme matricelle suivante,

$$\begin{pmatrix} y_1(x') & y_2(x') \\ y_1'(x') & y_2'(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x') \\ B(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.61)$$

Compte tenu du fait que le déterminant de la matrice (8.61) est le wronskien $W(x')$, l'inversion du système matriciel (8.61) donne les coefficients $A(x')$ et $B(x')$,

$$\begin{pmatrix} A(x') \\ B(x') \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x')} \begin{pmatrix} y_2'(x') & -y_2(x') \\ -y_1'(x') & y_1(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y_2(x')}{W(x')} \\ \frac{y_1(x')}{W(x')} \end{pmatrix}. \quad (8.62)$$

En substituant les coefficients $A(x')$ et $B(x')$ dans la fonction de Green (8.53), celle-ci devient,

$$G(x - x') = -\frac{y_1(x) y_2(x') - y_2(x) y_1(x')}{W(x')} \Theta(x - x'), \quad (8.63)$$

où la fonction de Heaviside $\Theta(x - x')$ rend compte de la causalité. La solution particulière (8.49) de l'équation différentielle inhomogène (8.2) s'écrit,

$$y_p(x) = \int^x G(x - x') f(x') dx'. \quad (8.64)$$

En substituant la fonction de Green (8.63) dans la solution particulière (8.64), celle-ci devient,

$$y_p(x) = y_2(x) \int^x \frac{y_1(x') f(x')}{W(x')} dx' - y_1(x) \int^x \frac{y_2(x') f(x')}{W(x')} dx'. \quad (8.65)$$

8.6 Polynômes de Laguerre

En guise de première application, on considère l'équation de Laguerre qui décrit, dans sa forme généralisée, la partie radiale de la fonction d'onde stationnaire d'un électron dans le modèle quantique de l'atome d'hydrogène. L'équation différentielle de Laguerre s'écrit,

$$x L_n''(x) + (1 - x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0, \quad (8.66)$$

où les fonctions $L_n(x)$ qui dépendent du paramètre $n \in \mathbb{N}$ sont les polynômes de Laguerre. Afin de déterminer le développement en série de puissances de ces polynômes, on utilise la méthode de Frobenius. Le développement en série de puissances (8.25) des polynômes de Laguerre $L_n(x)$ autour de $x = 0$ s'écrit,

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j} \quad \text{où} \quad s \geq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0. \quad (8.67)$$

En substituant le développement en série de puissances (8.67) dans l'équation différentielle de Laguerre (8.66), on obtient l'équation de Frobenius,

$$\begin{aligned} & x \sum_{j=0}^{\infty} (s+j-1)(s+j) a_j x^{s+j-2} \\ & + (1-x) \sum_{j=0}^{\infty} (s+j) a_j x^{s+j-1} + n \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j} = 0, \end{aligned} \quad (8.68)$$

qui est remise en forme comme,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (s+j)^2 a_j x^{s+j-1} - \sum_{j=0}^{\infty} (s+j-n) a_j x^{s+j} = 0. \quad (8.69)$$

En sortant le premiers terme de la première somme et en décalant l'index muet $j \rightarrow j+1$, l'équation de Frobenius (8.69) devient,

$$s^2 a_0 x^{s-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \left((s+j+1)^2 a_{j+1} - (s+j-n) a_j \right) x^{s+j} = 0. \quad (8.70)$$

Afin de l'équation de Frobenius (8.70) soit satisfaite, il faut que les facteurs de chaque puissance de x s'annulent. En particulier, il faut que le facteur de x^{s-1} s'annule compte tenu de la condition $a_0 \neq 0$, ce qui donne l'équation indicelle,

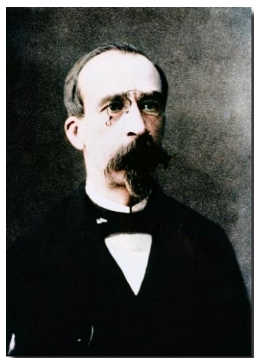
$$s^2 = 0 \quad \text{ainsi} \quad s = 0. \quad (8.71)$$

Compte tenu de l'équation indicelle (8.71), l'équation de Frobenius se réduit à,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1)^2 a_{j+1} - (j-n) a_j \right) x^j = 0. \quad (8.72)$$

Finalement, le facteur de x^j s'annule pour tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui donne une relation de récurrence entre les coefficients a_j et a_{j+1} ,

$$a_{j+1} = \frac{j-n}{(j+1)^2} a_j. \quad (8.73)$$



Edmond Laguerre

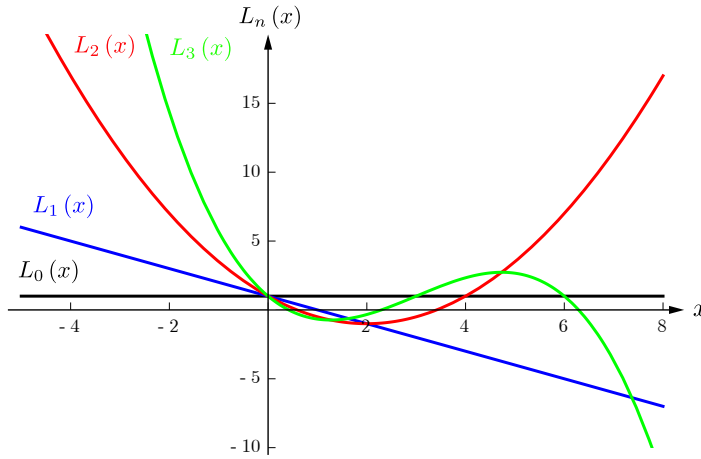


FIGURE 8.1 Polynômes de Laguerre $L_0(x)$ en noir, $L_1(x)$ en bleu, $L_2(x)$ en rouge et $L_3(x)$ en vert.

Ainsi, les trois premiers coefficients, où $j \in \{0, 1, 2\}$, s'écrivent,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-n}{1^2} a_0 = \frac{(-1)n}{(1!)^2} a_0, \\ a_2 &= \frac{1-n}{2^2} a_1 = \frac{(-1)^2 n(n-1)}{(2!)^2} a_0, \\ a_3 &= \frac{2-n}{3^2} a_2 = \frac{(-1)^3 n(n-1)(n-2)}{(3!)^2} a_0. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Le dernier coefficient est a_n . En effet,

$$a_{n+1} = \frac{n-n}{(n+1)^2} a_n = 0. \quad (8.75)$$

Par récurrence, tous les coefficients a_j pour lesquels $j > n$ sont tous nuls. Compte tenu des trois premiers coefficients (8.74), un coefficient quelconque a_j où $0 \leq j \leq n$ s'écrit par récurrence,

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{(-1)^j n(n-1)\dots(n-j+1)}{(j!)^2} a_0 \\ &= \frac{(-1)^j n(n-1)\dots(n-j+1)(n-j)(n-j-1)\dots 2 \cdot 1}{(n-j)(n-j-1)\dots 2 \cdot 1 (j!)^2} a_0 \\ &= \frac{(-1)^j n!}{(n-j)!(j!)^2} a_0 = \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} a_0. \end{aligned} \quad (8.76)$$

Ainsi, en prenant comme premier coefficient $a_0 = 1$, le développement en série de puissances des polynômes de Laguerre s'écrit,

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} x^j. \quad (8.77)$$

Les quatre premiers polynômes de Laguerre, où $n \in \{0, 1, 2\}$, s'écrivent (Fig. 8.1),

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= -x + 1, \\ L_2(x) &= \frac{1}{2!} (x^2 - 4x + 2), \\ L_3(x) &= \frac{1}{3!} (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6). \end{aligned} \quad (8.78)$$

Les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ ont comme propriété,

$$L_n(0) = 1. \quad (8.79)$$

8.7 Oscillateur harmonique forcé

Comme seconde application, on considère l'équation différentielle inhomogène décrivant le mouvement d'un oscillateur harmonique forcé,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} f(t), \quad (8.80)$$

où m est la masse, γ est le paramètre de frottement visqueux, ω_0^2 est la pulsation au carré en absence d'amortissement et $f(t)$ est la force d'entraînement. L'équation différentielle homogène décrivant le mouvement d'un oscillateur amorti en absence de force d'entraînement, c'est-à-dire $f(t) = 0$, s'écrit,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (8.81)$$

Etant donné que cette équation différentielle homogène a des coefficients constants,

$$p_0(t) = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad p_1(t) = 2\gamma \quad \text{et} \quad p_2(t) = 1, \quad (8.82)$$

les solutions de cette équation sont de la forme,

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8.83)$$

En substituant les solutions (8.83) dans l'équation différentielle (8.81), on obtient l'équation caractéristique,

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (8.84)$$

Les coefficients caractéristiques sont,

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (8.85)$$

Ces coefficients caractéristiques sont liés par la relation,

$$\lambda_+ + \lambda_- = -2\gamma. \quad (8.86)$$

La première solution est,

$$x_1(t) = e^{\lambda_+ t} = e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}. \quad (8.87)$$

Compte tenu des coefficients (8.82), le wronskien (8.42) est,

$$W(t) = \exp\left(-\int^t 2\gamma dt'\right) = e^{-2\gamma t}. \quad (8.88)$$

A l'aide du Wronskien (8.88), la deuxième solution (8.45) s'écrit,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t) \int^t \frac{dt'}{x_1(t')^2} = e^{\lambda_+ t} \int^t \frac{e^{-2\gamma t'}}{(e^{\lambda_+ t'})^2} dt' \\ &= e^{\lambda_+ t} \int^t e^{-2(\gamma + \lambda_+)t'} dt' = -\frac{e^{\lambda_+ t} e^{-2(\gamma + \lambda_+)t}}{2(\gamma + \lambda_+)} = -\frac{e^{-(2\gamma + \lambda_+)t}}{2\gamma + 2\lambda_+}. \end{aligned} \quad (8.89)$$

Compte tenu des identités (8.85) et (8.86), la deuxième solution (8.89) devient,

$$x_2(t) = -\frac{e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} = -\frac{e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}}{2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (8.90)$$

A l'aide de la première solution (8.87), de la deuxième solution (8.90) et du wronskien (8.88), la fonction de Green (8.63) s'écrit,

$$\begin{aligned} G(t-t') &= -\frac{x_1(t)x_2(t') - x_2(t)x_1(t')}{W(t')} \Theta(t-t') \\ &= e^{-\gamma(t-t')} \frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')} - e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')}}{2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Theta(t-t'). \end{aligned} \quad (8.91)$$

En régime d'amortissement faible, c'est-à-dire $\gamma < \omega_0$, la pulsation du mouvement harmonique oscillatoire amorti est définie comme,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (8.92)$$

et la fonction de Green (8.91) devient alors (Fig. 8.2),

$$G(t - t') = e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\omega} \Theta(t-t'). \quad (8.93)$$

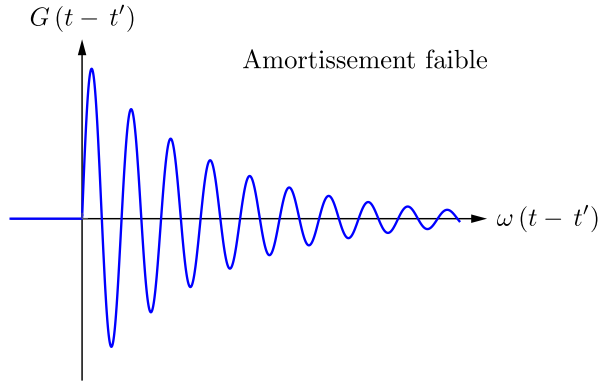


FIGURE 8.2 Fonction de Green temporelle $G(t - t')$, où $t > t'$, d'un oscillateur amorti forcé de pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ en régime d'amortissement faible où $\gamma < \omega_0$.

En régime d'amortissement fort, c'est-à-dire $\gamma > \omega_0$, le temps d'amortissement caractéristique est défini comme,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \quad \text{si} \quad \gamma > \omega_0, \quad (8.94)$$

et la fonction de Green (8.91) devient alors (Fig. 8.3),

$$G(t - t') = e^{-\gamma(t-t')} \tau \sinh\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) \Theta(t-t'). \quad (8.95)$$

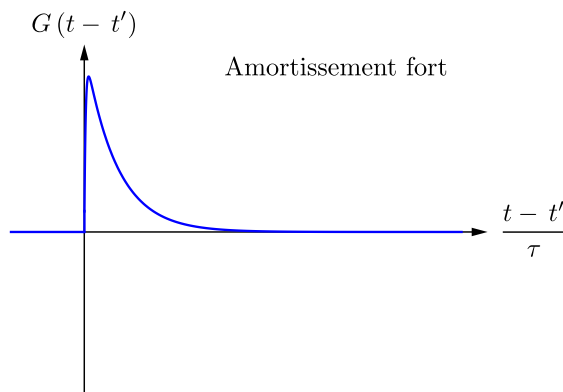


FIGURE 8.3 Fonction de Green temporelle $G(t - t')$, où $t > t'$, d'un oscillateur amorti forcé avec un temps d'amortissement caractéristique $\tau = 1/\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ en régime d'amortissement fort où $\gamma > \omega_0$.

L'implémentation des méthodes du wronskien et de Green est nettement plus simple et directe que le calcul de l'intégrale de contour d'une transformation de Fourier inverse à l'aide du théorème des résidus effectués en sect. 7.6! Les fonctions de Green ainsi obtenues sont les mêmes...

9.1 Introduction

De nombreux problèmes physiques font intervenir des équations différentielles homogènes ordinaires du deuxième ordre de la forme $p_2(x)y_n''(x) + p_1(x)y_n'(x) + (p_0(x) - \lambda_n)y(x) = 0$. Les solutions de ces équations différentielles sont un ensemble infini dénombrable de fonctions $y_n(x)$ indicées par un nombre $n \in \mathbb{N}^*$. Ces fonctions sont des fonctions propres qui satisfont des équations aux valeurs propres d'un opérateur différentiel linéaire $\mathcal{L} = p_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x)$ de la forme $\mathcal{L}y_n(x) = \lambda_n y_n(x)$ comme montré en sect 9.2. L'espace vectoriel des fonctions propres $y_n(x)$ est un espace de Hilbert \mathcal{H} , c'est-à-dire un espace de fonctions de carré intégrable $L^2(\mathbb{R})$ muni d'un produit scalaire avec une mesure déterminée par une fonction poids $w(x) \in \mathbb{R}_+$. Les vecteurs propres de la base de l'espace de Hilbert \mathcal{H} sont les vecteurs ket $|y_n\rangle$ et les vecteurs de la base du dual de l'espace de Hilbert \mathcal{H}^* sont les vecteurs bra $\langle y_n|$ comme détaillé en sect 9.6. L'espace de Hilbert est isomorphe à son dual $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$. Afin que les valeurs propres λ_n de l'opérateur \mathcal{L} soient réelles, il faut que l'opérateur \mathcal{L} soit hermitien. Cela détermine les conditions aux bords et impose une relation différentielle entre les coefficients $p_1(x)$ et $p_2(x)$ et la fonction poids $w(x)$. L'équation différentielle peut alors être exprimée uniquement en termes des fonctions propres $y_n(x)$ et de leur dérivée premières $y_n'(x)$: c'est la forme de Sturm-Liouville.

Afin que les fonctions propres $y_n(x)$ de l'équation différentielle soient des polynômes de degré n , les coefficients $p_1(x)$ et $p_2(x)$ des dérivées première $y'(x)$ et seconde $y''(x)$ doivent être des polynômes de degrés 1 et 2 respectivement et la fonction $p_0(x)$ doit être nulle comme expliqué en sect 9.3. Dans ce cas, les fonctions propres $y_n(x)$ sont proportionnelles aux dérivées n^e de la fonction $w(x)p_2^n(x)$. Elles sont définies par la formule de Rodrigues qui est démontrée en sect. 9.4. Elles peuvent aussi être obtenues en dérivant des fonctions génératrices établies en sect. 9.5. Grâce à la dérivée n^e de la formule intégrale de Cauchy, les fonctions propres peuvent être exprimées comme des intégrales de contour des fonctions génératrices ou des fonctions $w(x)p_2^n(x)$ appelées intégrales de Schaeffli.

Dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} et son inverse \mathcal{L}^{-1} peuvent être décomposés en sommes discrètes infinies de projecteurs $|y_n\rangle\langle y_n|$ sur les fonctions propres multipliés par les valeurs propres λ_n et leurs inverses λ_n^{-1} respectivement. Cette décomposition, appelée décomposition spectrale, est établie en sect. 9.7.

De nombreux problèmes physiques sont décrits par des équations différentielles inhomogènes ordinaires de la forme $\mathcal{L}y(x) = f(x)$. Les fonctions $y(x)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions propres $y_n(x)$, mais elles ne sont pas elles-mêmes des fonctions propres. Les solutions de ces équations différentielles inhomogènes sont obtenues par produit de convolution entre la fonction de Green et le terme d'entraînement $f(x)$, c'est-à-dire $y(x) = \mathcal{L}^{-1}f(x) = (G * f)(x)$. A l'aide de la décomposition spectrale de l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} , la décomposition spectrale de la fonction de Green est établie en sect. 9.8.

En guise d'application de la théorie de Sturm-Liouville, on examine des ondes stationnaires sur une corde homogène horizontale fixée à ses extrémités en sect. 9.9. On détermine l'équation d'onde inhomogène en présence d'une force d'entraînement périodique verticale. La transformée de Fourier inverse par rapport au temps de l'équation d'onde donne l'équation de Helmholtz inhomogène $y''(x) + k^2 y(x) = f(x)$ décrivant l'onde stationnaire. Compte

tenu des conditions aux bords, on en déduit les fonctions propres ainsi que la décomposition spectrale de la fonction de Green, ce qui permet déterminer le profil de l'onde $y(x)$ à l'aide d'une décomposition en série de Fourier du terme d'entraînement $f(x)$.

9.2 Théorie de Sturm-Liouville

Dans la résolution de nombreux problèmes physiques, on est confronté à des équations différentielles ordinaires homogènes du deuxième ordre de la forme,

$$p_2(x) y_n''(x) + p_1(x) y_n'(x) + (p_0(x) - \lambda_n) y_n(x) = 0, \quad (9.1)$$

où $p_0(x)$, $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont des fonctions réelles et $\lambda_n \in \mathbb{R}$ est un nombre réel qui dépendent d'un paramètre entier $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de l'équation différentielle ordinaire homogène (9.1) sont un ensemble infini dénombrable de fonctions propres $y_n(x)$ qui satisfont une équation aux valeurs propres pour l'opérateur linéaire \mathcal{L} défini comme,

$$\mathcal{L} = p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x). \quad (9.2)$$

Compte tenu de l'opérateur linéaire (9.2), des fonctions propres $y_n(x)$ et de leurs valeurs propres associées λ_n , l'équation aux valeurs propres s'écrit,

$$\mathcal{L} y_n(x) = \lambda_n y_n(x). \quad (9.3)$$

Au vu de l'équation aux valeurs propres (9.3), la linéarité des fonctions propres $y_m(x)$ et $y_n(x)$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha_1 y_m(x) + \alpha_2 y_n(x)) &= \alpha_1 \mathcal{L} y_m(x) + \alpha_2 \mathcal{L} y_n(x) \\ &= \alpha_1 \lambda_m y_m(x) + \alpha_2 \lambda_n y_n(x). \end{aligned} \quad (9.4)$$

L'orthonormalité des fonctions propres $y_m(x)$ et $y_n(x)$ est donnée par le produit scalaire défini comme,

$$\langle y_m | y_n \rangle = \int_a^b y_m^*(x) y_n(x) w(x) dx = \delta_{nm}, \quad (9.5)$$

où la fonction poids $w(x)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ assure l'orthonormalité des fonctions propres sur l'intervalle $[a, b]$. Les équations différentielles homogène du deuxième ordre avec des solutions polynomiales qui interviennent en physique, notamment les équations de Laguerre, d'Hermite, de Legendre et de Bessel ont des fonctions poids définies positives. A présent, on va déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur linéaire \mathcal{L} soit hermitien. Pour ce faire, compte tenu des définitions de l'opérateur linéaire (9.2) et du produit scalaire (9.5), on écrit les deux produits scalaires suivants,

$$\begin{aligned} \langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle &= \int_a^b y_m^*(x) \left(p_2(x) y_n''(x) + p_1(x) y_n'(x) + p_0(x) y_n(x) \right) w(x) dx, \\ \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle &= \int_a^b \left(p_2(x) y_m^{*''}(x) + p_1(x) y_m^{*'}(x) + p_0(x) y_m^*(x) \right) y_n(x) w(x) dx. \end{aligned} \quad (9.6)$$

A l'aide d'une intégration par parties effectuée sur le première intégrale, la différence entre les produits scalaires (9.6) s'écrit,

$$\begin{aligned} \langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle &= \\ &= \int_a^b (y_m^* p_2 w y_n'' - y_n p_2 w y_m^{*''}) dx + \int_a^b (y_m^* p_1 w y_n' - y_n p_1 w y_m^{*'}) dx \\ &\quad + \int_a^b (y_m^* p_0 w y_n - y_n p_0 w y_m^*) dx \\ &= (y_m^* p_2 w y_n' - y_n p_2 w y_m^{*'}) \Big|_a^b - \int_a^b \left((y_m^* p_2 w)' y_n' - (y_n p_2 w)' y_m^{*'} \right) dx \\ &\quad + \int_a^b (y_m^* p_1 w y_n' - y_n p_1 w y_m^{*'}) dx. \end{aligned} \quad (9.7)$$

La première intégrale du dernier membre de l'équation (9.7) est mise en forme comme,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left((y_m^* p_2 w)' y_n' - (y_n p_2 w)' y_m^{*'} \right) dx \\ &= \int_a^b \left(y_m^* (p_2 w)' y_n' - y_n (p_2 w)' y_m^{*'} \right) dx + \int_a^b (y_m^{*'} p_2 w y_n' - y_n' p_2 w y_m^{*'}) dx \\ &= (p_2 w)' \int_a^b (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) dx. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Par conséquent, la différence entre les produits scalaires (9.7) devient,

$$\begin{aligned} & \langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle = \\ &= (p_2 w) (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) \Big|_a^b + \left(p_1 w - (p_2 w)' \right) \int_a^b (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) dx. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Les équations différentielles d'Hermite, de Laguerre et Laguerre généralisée, de Legendre et de Legendre généralisée (Tab. 9.1), satisfont les conditions aux bords suivantes,

$$p_2(a) w(a) = p_2(b) w(b) = 0. \tag{9.10}$$

Dans ce cas, le terme de bord dans l'équation (9.11) s'annule,

$$(p_2 w) (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) \Big|_a^b = 0. \tag{9.11}$$

Equations différentielles	$p_2(x)$	$w(x)$	$p_2(x) w(x)$	$[a, b]$
Hermite	1	e^{-x^2}	e^{-x^2}	$[-\infty, \infty]$
Laguerre	x	e^{-x^2}	$x e^{-x^2}$	$[0, \infty]$
Laguerre généralisés	x	$x^k e^{-x^2}$	$x^{k+1} e^{-x^2}$	$[0, \infty]$
Legendre	$1 - x^2$	1	$1 - x^2$	$[-1, 1]$
Legendre généralisés	$1 - x^2$	1	$1 - x^2$	$[-1, 1]$

TABLE 9.1 Equations différentielles pour lesquelles le terme $p_2 w$ s'annule aux bords de l'intervalle $[a, b]$.

Ainsi, la différence entre les produits scalaires (9.9) se réduit à,

$$\langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle = \left(p_1 w - (p_2 w)' \right) \int_a^b (y_m^* y_n' - y_n y_m^{*'}) dx. \tag{9.12}$$

Par conséquent, l'opérateur linéaire \mathcal{L} est hermitien (ou autoadjoint), c'est-à-dire qu'il est égal à son adjoint $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$,

$$\langle y_m | \mathcal{L} y_n \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger y_m | y_n \rangle = \langle \mathcal{L} y_m | y_n \rangle, \tag{9.13}$$

si et seulement si la condition hermiticité,

$$\left(p_2(x) w(x) \right)' = p_1(x) w(x), \tag{9.14}$$

est satisfaite. Si l'opérateur \mathcal{L} est hermitien, alors ses valeurs sont réelles, c'est-à-dire $\lambda_n = \lambda_n^*$. En effet,

$$\begin{aligned} \langle y_n | \mathcal{L} y_n \rangle - \langle \mathcal{L} y_n | y_n \rangle &= (\lambda_n - \lambda_n^*) \int_a^b y_n^*(x) y_n(x) w(x) dx \\ &= (\lambda_n - \lambda_n^*) \langle y_n | y_n \rangle = \lambda_n - \lambda_n^* = 0. \end{aligned} \tag{9.15}$$

La fonction poids définie comme,

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx' \right), \tag{9.16}$$



Jacques Charles François Sturm



Joseph Liouville

satisfait la condition d'hermité (9.14),

$$\left(p_2(x) w(x) \right)' = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx' \right) = p_1(x) w(x). \quad (9.17)$$

L'équation différentielle (9.1) multipliée par la fonction poids (9.16) s'écrit,

$$p_2(x) w(x) y_n''(x) + p_1(x) w(x) y_n'(x) + (p_0(x) - \lambda_n) w(x) y_n(x) = 0. \quad (9.18)$$

Compte tenu de la condition d'hermité (9.14), l'équation différentielle (9.18) devient,

$$p_2(x) w(x) y_n''(x) + \left(p_2(x) w(x) \right)' y_n'(x) + (p_0(x) - \lambda_n) w(x) y_n(x) = 0. \quad (9.19)$$

L'équation différentielle (9.19) se réduit à la forme de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left(w(x) p_2(x) y_n'(x) \right) + (p_0(x) - \lambda_n) w(x) y_n(x) = 0. \quad (9.20)$$

9.3 Solutions polynomiales

Dans le cas particulier où la fonction $p_0(x) = 0$, les fonctions $p_1(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ et $p_2(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ sont des polynômes de premier et deuxième degré respectivement,

$$p_1(x) = \beta_1 x + \beta_0 \quad \text{et} \quad p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (9.21)$$

avec des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0$ et β_1 constants, les fonctions propres $y_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ sont alors des polynômes de degré n ,

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad \text{où} \quad a_n \neq 0. \quad (9.22)$$

Par conséquent, à l'aide de méthode de Frobenius, l'équation différentielle (9.1) peut alors être écrite en termes de développements en série de puissance,

$$\begin{aligned} & (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \sum_{j=0}^n (j-1) j a_j x^{j-2} \\ & + (\beta_1 x + \beta_0) \sum_{j=0}^n j a_j x^{j-1} - \lambda_n \sum_{j=0}^n a_j x^j = 0. \end{aligned} \quad (9.23)$$

et peut être remise en forme comme,

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \sum_{j=0}^n j(j-1) a_j x^{j-2} + \sum_{j=0}^n j \left(\alpha_1(j-1) + \beta_0 \right) a_j x^{j-1} \\ & + \sum_{j=0}^n \left(j \left(\alpha_2(j-1) + \beta_1 \right) - \lambda_n \right) a_j x^j = 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Compte tenu du fait que le facteur du monôme de plus grand degré x^n doit s'annuler sous la contrainte $a_n \neq 0$, c'est-à-dire pour $j = n$ dans la dernière somme, on obtient la condition suivante,

$$\alpha_2 n(n-1) + \beta_1 n - \lambda_n = 0. \quad (9.25)$$

Ainsi, on en conclut que la valeur propre s'écrit,

$$\lambda_n = \alpha_2 n(n-1) + \beta_1 n. \quad (9.26)$$

Compte tenu des polynômes (9.21), les valeurs propres (9.26) sont remise en forme comme,

$$\lambda_n = \frac{1}{2} n(n-1) p_2'' + n p_1'. \quad (9.27)$$

9.4 Formule de Rodrigues

La formule de Rodrigues qui donne les polynômes de degré n qui sont solutions de l'équation différentielle homogène du deuxième ordre (9.1) compte tenu de la condition $p_0(x) = 0$ et des polynômes (9.21) s'écrit,

$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(w(x) p_2^n(x) \right), \quad (9.28)$$

où les coefficients c_n sont constants. Afin d'établir ce résultat, on va se baser sur la condition d'hermiticité (9.14) utilisée pour établir l'équation de Sturm-Liouville (9.20). En développant cette condition,

$$(p_2 w)' = p_2' w + p_2 w' = p_1 w, \quad (9.29)$$

on en déduit la dérivée de la fonction poids,

$$w' = \frac{p_1 - p_2'}{p_2} w. \quad (9.30)$$

Compte tenu de ce résultat, le développement,

$$p_2 (w p_2^n)' = p_2 (w' p_2^n + w n p_2' p_2^{n-1}), \quad (9.31)$$

donne l'identité suivante,

$$p_2 (w p_2^n)' = w p_2^n \left((n-1) p_2' + p_1 \right). \quad (9.32)$$

Compte tenu de la formule de Leibniz, la dérivée $n+1^e$ par rapport à x du membre de gauche de l'identité (9.32) s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (p_2 (w p_2^n)') &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{d^k p_2}{dx^k} \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}} (w p_2^n)' \\ &= p_2 \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (w p_2^n) + (n+1) p_2' \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) + \frac{n(n+1)}{2} p_2'' \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n). \end{aligned} \quad (9.33)$$

où $p_2^{(k)} = 0$ si $k > 2$ car $p_2(x)$ est un polynôme du deuxième degré en x d'après la définition (9.21). De manière analogue, la dérivée $n+1^e$ par rapport à x du membre de droite de l'identité (9.32) s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(\left((n-1) p_2' + p_1 \right) w p_2^n \right) &= \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{d^k \left((n-1) p_2' + p_1 \right)}{dx^k} \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}} (w p_2^n) \\ &= \left((n-1) p_2' + p_1 \right) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) + (n+1) \left((n-1) p_2'' + p_1' \right) \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n). \end{aligned} \quad (9.34)$$

où $p_2^{(k)} = 0$ et $p_1^{(k)} = 0$ si $k > 1$ d'après la définition (9.21). Par conséquent, compte tenu des développements en série (9.33) et (9.34), la dérivée $n+1^e$ par rapport à x de l'identité (9.32),

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (p_2 (w p_2^n)') = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(\left((n-1) p_2' + p_1 \right) w p_2^n \right), \quad (9.35)$$

devient,

$$\begin{aligned} p_2 \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (w p_2^n) + (n+1) p_2' \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) + \frac{n(n+1)}{2} p_2'' \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n) \\ = \left((n-1) p_2' + p_1 \right) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) + (n+1) \left((n-1) p_2'' + p_1' \right) \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n). \end{aligned} \quad (9.36)$$

L'équation différentielle (9.36) multipliée par c_n/w se réduit à,

$$\begin{aligned} p_2 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (w p_2^n) + (2p_2' - p_1) \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) \\ - \left(\frac{n^2 - n - 2}{2} p_2'' + (n+1) p_1' \right) \frac{c_n}{w} \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n) = 0. \end{aligned} \quad (9.37)$$



Olinde Rodrigues



Gottfried Wilhelm Leibniz

A présent, on suppose que les fonctions propres $y_n(x)$ sont données par la formule de Rodrigues (9.28) et on montre qu'elles satisfont l'équation différentielle du deuxième ordre (9.1). Compte tenu des formules de Rodrigues (9.28) et de Leibniz, on obtient l'identité suivante,

$$\begin{aligned}
p_2 y_n'' &= p_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{c_n}{w} \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n) \right) \\
&= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{c_n}{w} \right) \frac{d^{2-k}}{dx^{2-k}} \left(\frac{d^n (w p_2^n)}{dx^n} \right) \\
&= p_2 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (w p_2^n) + 2 p_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{c_n}{w} \right) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) \\
&\quad + p_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{c_n}{w} \right) \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n).
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Compte tenu de la dérivée de la fonction poids (9.30),

$$p_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{c_n}{w} \right) = -p_2 \frac{w'}{w} \frac{c_n}{w} = - (p_1 - p_2') \frac{c_n}{w}, \tag{9.39}$$

et de la dérivée seconde,

$$\begin{aligned}
p_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{c_n}{w} \right) &= -p_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{p_1 - p_2'}{p_2} \frac{c_n}{w} \right) \\
&= -p_2 \left(\frac{(p_1' - p_2'') p_2 - (p_1 - p_2') p_2'}{p_2^2} \frac{c_n}{w} \right) + \frac{p_1 - p_2'}{p_2} \frac{c_n}{w} \\
&= \left(- (p_1' - p_2'') + \frac{(p_1 - p_2') p_2'}{p_2} + \frac{(p_1 - p_2')^2}{p_2} \right) \frac{c_n}{w} \\
&= \left(- (p_1' - p_2'') + \frac{p_1 (p_1 - p_2')}{p_2} \right) \frac{c_n}{w},
\end{aligned} \tag{9.40}$$

Compte tenu des dérivées première (9.39) et seconde (9.40), l'identité (9.38) devient,

$$\begin{aligned}
p_2 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (w p_2^n) &= p_2 y_n'' + 2 (p_1 - p_2') \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) \\
&\quad + \left((p_1' - p_2'') - \frac{p_1 (p_1 - p_2')}{p_2} \right) \frac{c_n}{w} \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n).
\end{aligned} \tag{9.41}$$

En substituant l'identité (9.41) dans l'équation différentielle (9.37) compte tenu de la formule de Rodrigues (9.28), celle-ci devient,

$$p_2 y_n'' + p_1 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) - \left(\frac{1}{2} n(n-1) p_2'' + n p_1' + \frac{p_1 (p_1 - p_2')}{p_2} \right) y_n = 0. \tag{9.42}$$

Compte tenu de la formule de Rodrigues (9.28), on obtient l'identité suivante,

$$\begin{aligned}
p_1 y_n' &= p_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{c_n}{w} \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n) \right) = p_1 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) + p_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{c_n}{w} \right) \\
&= p_1 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) - p_1 \frac{w'}{w} \frac{c_n}{w} \frac{d^n}{dx^n} (w p_2^n) \\
&= p_1 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) - \frac{p_1 (p_1 - p_2')}{p_2} y_n,
\end{aligned} \tag{9.43}$$

qui est remise en forme comme,

$$p_1 \frac{c_n}{w} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (w p_2^n) = p_1 y_n' + \frac{p_1 (p_1 - p_2')}{p_2} y_n. \tag{9.44}$$

A l'aide de la relation (9.44), l'équation différentielle (9.42) se réduit à,

$$p_2 y_n'' + p_1 y_n' - \left(\frac{1}{2} n(n-1) p_2'' + n p_1' \right) y_n = 0. \tag{9.45}$$

Compte tenu de la définition (9.27) de la valeur propre λ_n , l'équation différentielle (9.45) est l'équation différentielle initiale (9.1) lorsque $p_0 = 0$,

$$p_2 y_n'' + p_1 y_n' - \lambda_n y_n = 0, \tag{9.46}$$

ce qui établit que la formule de Rodrigues (9.28) est bien solution de cette équation différentielle.

9.5 Fonction génératrice et intégrale de Schaeffi

Les polynômes d’Hermite, de Laguerre, de Laguerre généralisés, de Legendre, de Legendre généralisé ainsi que les fonctions de Bessel peuvent être dérivés de fonctions génératrices. Les fonctions propres $y_n(x)$ peuvent être considérées comme des coefficients d’un développement en série de puissances d’une variable auxiliaire t . Ce développement en série de puissance constitue la fonction génératrice $g(x, t)$,

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) t^n. \tag{9.47}$$

La dérivée n^e de la fonction génératrice (9.47) par rapport à la variable auxiliaire t évaluée en $t = 0$ s’écrit,

$$\left. \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k y_k(x) n! t^{k-n} \Big|_{t=0} = c_n n! y_n(x). \tag{9.48}$$

La formule intégrale de Cauchy pour une fonction holomorphe $f(z)$ est définie comme suit,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-x} dz. \tag{9.49}$$

La dérivée n^e de la formule intégrale de Cauchy (9.49) par rapport à x s’écrit,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz. \tag{9.50}$$

Pour la fonction génératrice $f(t) = g(x, t)$, la dérivée partielle n^e de la formule intégrale de Cauchy (9.50) par rapport à t devient,

$$\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, z)}{(z-t)^{n+1}} dz. \tag{9.51}$$

En comparant les dérivées partielles de la fonction génératrice (9.48) et (9.51), les fonctions propres sont obtenues par calcul d’une intégrale de contour \mathcal{C} dont l’intégrand est proportionnel à la fonction génératrice,

$$y_n(x) = \frac{1}{c_n n!} \left. \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{c_n} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, z)}{z^{n+1}} dz. \tag{9.52}$$

Compte tenu de la dérivée partielle n^e de la formule intégrale de Cauchy (9.50) par rapport à x pour la fonction $f(x) = w(z) p_2^n(z)$, la formule différentielle de Rodrigues (9.28) donne l’intégrale de contour de Schaeffi,

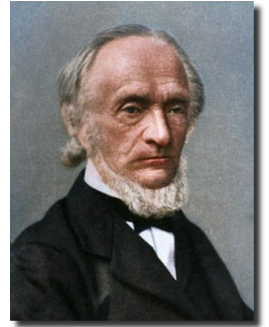
$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x) p_2^n(x)) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{w(z) p_2^n(z)}{(z-x)^{n+1}} dz. \tag{9.53}$$

9.6 Fonctions propres et espace de Hilbert

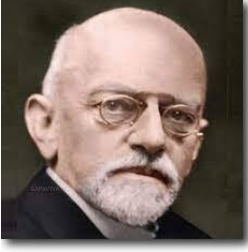
Les fonctions propres $|y_n\rangle$, appelés des vecteurs “ket”, sont les vecteurs de base d’une base orthonormée de l’espace vectoriel de Hilbert \mathcal{H} muni du produit scalaire (9.5). Les fonctions propres $y_n(x)$ évaluées en x sont obtenus par produit scalaire du vecteur “bra” $\langle x|$ et du vecteur “ket” $\langle y_n| \in \mathcal{H}$,

$$y_n(x) = \langle x|y_n\rangle. \tag{9.54}$$

Ce produit scalaire est donc un “bra-ket”. Les fonctions propres duales $\langle y_n|$, appelés des vecteurs “bra”, sont les vecteurs de base d’une base orthonormée de l’espace vectoriel de



Ludwig Schläfli



David Hilbert

Hilbert dual \mathcal{H}^* . Les fonctions propres $y_n^*(x)$ évaluées en x sont obtenus par produit scalaire du vecteur “bra” $\langle y_n | \in \mathcal{H}^*$ et du vecteur “ket” $|x\rangle$,

$$y_n^*(x) = \langle x | y_n \rangle^* = \langle y_n | x \rangle. \quad (9.55)$$

Le produit scalaire (9.5) entre des fonctions propres et leurs conjugués complexes montre que l'espace de Hilbert \mathcal{H} est isomorphe à l'espace de Hilbert dual \mathcal{H}^* , c'est-à-dire que $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$. La solution générale de l'équation différentielle ordinaire homogène du deuxième ordre (9.1) est une combinaison linéaire de fonctions propres,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad (9.56)$$

qui peut être exprimée comme un produit scalaire dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} ,

$$y(x) = \langle x | y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle x | y_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x). \quad (9.57)$$

Ainsi, le vecteur “ket” (9.57) s'écrit dans l'espace de Hilbert de la manière suivante,

$$\begin{aligned} |y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n |y_n\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m \delta_{nm} |y_n\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m \langle y_n | y_m \rangle |y_n\rangle \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m |y_n\rangle \langle y_n | y_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n | y \rangle = \hat{1} |y\rangle, \end{aligned} \quad (9.58)$$

où $\hat{1}$ est l'opérateur identité. On en déduit la relation de fermeture discrète, à savoir que l'opérateur identité $\hat{1}$ est la somme des projecteurs $|y_n\rangle \langle y_n |$ sur l'ensemble de la base discrète des fonctions propres,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n | = \hat{1}. \quad (9.59)$$

Compte tenu des définitions (9.54) et (9.55), le produit scalaire (9.5) peut être mis sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} \langle y_m | y_n \rangle &= \int_a^b y_m^*(x) y_n(x) w(x) dx = \int_a^b \langle y_m | x \rangle \langle x | y_n \rangle w(x) dx \\ &= \langle y_m | \left(\int_a^b |x\rangle \langle x | w(x) dx \right) | y_n \rangle = \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (9.60)$$

On en déduit la relation de fermeture continue, à savoir que l'opérateur identité $\hat{1}$ est l'intégrale des projecteurs $|y_n\rangle \langle y_n |$ pondérée par la fonction poids $w(x)$ sur toute la base continue,

$$\int_a^b |x\rangle \langle x | w(x) dx = \hat{1}. \quad (9.61)$$

Compte tenu de la définition (9.54) et de la relation de fermeture continue (9.61),

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \langle x | y_n \rangle = \langle x | \hat{1} | y_n \rangle = \int_a^b \langle x | x' \rangle \langle x' | y_n \rangle w(x') dx' \\ &= \int_a^b y_n(x') \langle x | x' \rangle w(x') dx' = \int_a^b y_n(x') \delta(x - x') dx'. \end{aligned} \quad (9.62)$$

A l'aide de la dernière identité sur les intégrants de la relation (9.62) et de la relation de fermeture discrète (9.59), on obtient une expression de la distribution de Dirac en termes des fonctions propres $y_n(x)$,

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \langle x | x' \rangle w(x') = \langle x | \hat{1} | x' \rangle w(x') \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x | y_n \rangle \langle y_n | x' \rangle w(x') = w(x') \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(x) y_n(x'). \end{aligned} \quad (9.63)$$

9.7 Décomposition spectrale

Pour établir la décomposition spectrale de l'opérateur linéaire \mathcal{L} , on écrit l'équation aux valeurs propres (9.3),

$$\mathcal{L} y_n(x) = \langle x | \mathcal{L} y_n \rangle = \lambda_n \langle x | y_n \rangle = \lambda_n y_n(x) . \quad (9.64)$$

Dans l'espace de Hilbert, l'équation aux valeurs propres s'écrit,

$$\mathcal{L} | y_n \rangle = \lambda_n | y_n \rangle . \quad (9.65)$$

Compte tenu de la relation de fermeture discrète (9.59), l'équation aux valeurs propres (9.65) devient,

$$\mathcal{L} | y_m \rangle = \lambda_m | y_m \rangle = \lambda_m \hat{1} | y_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n | y_n \rangle \langle y_n | y_m \rangle . \quad (9.66)$$

On déduit la décomposition spectrale de l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n | y_n \rangle \langle y_n | . \quad (9.67)$$

L'opérateur linéaire inverse \mathcal{L}^{-1} a le même espace propre, généré par les mêmes fonctions propres, que l'opérateur linéaire \mathcal{L} mais avec des valeurs propres inverses,

$$\mathcal{L}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} | y_n \rangle \langle y_n | . \quad (9.68)$$

En effet, la composition de l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} et de son inverse \mathcal{L}^{-1} donne bien l'identité,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} | y_m \rangle \langle y_m | \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n | y_n \rangle \langle y_n | \right) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} | y_m \rangle \langle y_m | y_n \rangle \langle y_n | = \sum_{n=1}^{\infty} | y_n \rangle \langle y_n | = \hat{1} . \end{aligned} \quad (9.69)$$

9.8 Fonction de Green

Dans la résolution de problèmes physiques, on est souvent confronté à des équations différentielles ordinaires inhomogènes du deuxième ordre de la forme,

$$p_2(x) y''(x) + p_1(x) y'(x) + p_0(x) y(x) + k^2 y(x) = f(x) , \quad (9.70)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f(x)$ est un terme de source ou d'entraînement. Compte tenu de la définition de l'opérateur différentiel linéaire (9.2), l'équation différentielle ordinaire inhomogène (9.70) est mise sous la forme suivante,

$$(\mathcal{L} + k^2 \hat{1}) y(x) = f(x) . \quad (9.71)$$

A l'aide de l'opérateur différentiel linéaire défini comme,

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} + k^2 \hat{1} , \quad (9.72)$$

l'équation différentielle inhomogène (9.71) se réduit,

$$\mathcal{D} y(x) = f(x) , \quad (9.73)$$

dont la solution formelle est,

$$y(x) = \mathcal{D}^{-1} f(x) . \quad (9.74)$$

Compte tenu de la décomposition spectrale (9.67) de l'opérateur \mathcal{L} , on en déduit la décomposition spectrale de l'opérateur \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{L} + k^2 \hat{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |y_n\rangle \langle y_n| + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (k^2 + \lambda_n) |y_n\rangle \langle y_n|. \end{aligned} \quad (9.75)$$

Par conséquent, l'inverse de l'opérateur (9.75) est défini comme,

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} |y_n\rangle \langle y_n|. \quad (9.76)$$

En effet, la composition de l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{D} et de son inverse \mathcal{D}^{-1} donne bien l'identité,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{D} &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_m} |y_m\rangle \langle y_m| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (k^2 + \lambda_n) |y_n\rangle \langle y_n| \right) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{k^2 + \lambda_n}{k^2 + \lambda_m} |y_m\rangle \langle y_m| y_n\rangle \langle y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n\rangle \langle y_n| = \hat{1}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Compte tenu des définitions (9.54) et (9.55) et de la relation de fermeture continue (9.61), l'équation différentielle (9.74) évaluée en x s'écrit,

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{D}^{-1} f(x) = \langle x | \mathcal{D}^{-1} f \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} \langle x | y_n \rangle \langle y_n | f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) \langle y_n | \hat{1} | f \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) \int_a^b \langle y_n | x' \rangle \langle x' | f \rangle w(x') dx' \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) y_n^*(x') f(x') w(x') dx'. \end{aligned} \quad (9.78)$$

La solution de l'équation différentielle inhomogène $y(x)$ est le produit de convolution de la fonction de Green avec le terme d'entraînement $f(x)$ pondéré par la fonction poids $w(x)$,

$$y(x) = (G * f)(x) = \int_a^b G(x - x') f(x') w(x') dx'. \quad (9.79)$$

En comparant les intégrands des solutions (9.78) et (9.79), on en déduit la fonction de Green,

$$G(x - x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) y_n^*(x') = G^*(x' - x), \quad (9.80)$$

où la dernière égalité résulte du fait que les valeurs propres soient réelles, c'est-à-dire $\lambda_n = \lambda_n^*$. Compte tenu des définitions (9.54) et (9.55) et de la décomposition spectrale (9.76), la fonction de Green peut être mise sous la forme suivante,

$$G(x - x') = \langle x | \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} |y_n\rangle \langle y_n| \right) | x' \rangle = \langle x | \mathcal{D}^{-1} | x' \rangle. \quad (9.81)$$

Afin d'établir l'équation de Green, on fait agir l'opérateur différentiel \mathcal{D} sur la fonction de Green (9.81) compte tenu de la distribution de Dirac (9.63) et de l'identité (9.77),

$$\begin{aligned} \mathcal{D} G(x - x') &= \mathcal{D} \langle x | \mathcal{D}^{-1} | x' \rangle = \langle x | \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^{-1} | x' \rangle = \\ &= \langle x | \hat{1} | x' \rangle = \langle x | x' \rangle = \frac{\delta(x - x')}{w(x')}. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Par conséquent, l'équation de Green pondérée par la fonction poids $w(x)$ s'écrit,

$$\mathcal{D} G(x - x') w(x') = \delta(x - x'). \quad (9.83)$$

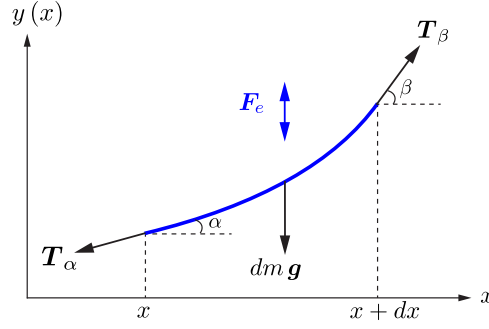


FIGURE 9.1 Élément de corde infinitésimal soumis à son poids $dm \mathbf{g}$, aux tensions \mathbf{T}_α et \mathbf{T}_β et à la force d'entraînement \mathbf{F}_e .

En mécanique quantique, il est utile est même nécessaire de normaliser les fonctions propres afin de pouvoir faire des calculs de probabilités. Les fonctions propres normalisées $\varphi_n(x)$ et leurs conjugués complexes sont définis comme,

$$\varphi_n(x) = \sqrt{w(x)} y_n(x) \quad \text{et} \quad \varphi_n^*(x) = \sqrt{w(x)} y_n^*(x). \quad (9.84)$$

Compte tenu du produit scalaire (9.5) des fonctions propres $y_n(x)$, le produit scalaire des fonctions propres normalisées $\varphi_n(x)$ satisfait la condition d'orthonormalité,

$$\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \int_a^b \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (9.85)$$

9.9 Ondes stationnaires sur une corde vibrante

Comme application de la théorie de Sturm-Liouville, on va décrire des ondes stationnaires sur une corde vibrante entretenue par une force d'entraînement verticale périodique. Pour ce faire, on considère une corde élastique horizontale de longueur L tendue. Un élément de masse infinitésimale dm , de largeur infinitésimale dx est soumis à quatre forces extérieures : le poids $dm \mathbf{g}$, la tension \mathbf{T}_α exercée le long de la corde en x vers la gauche, la tension \mathbf{T}_β exercée le long de la corde en $x + dx$ vers la droite, et la force d'entraînement verticale périodique \mathbf{F}_e (Fig. 9.1). Ces forces sont représentées dans le plan cartésien vertical Oxy comme,

$$\begin{aligned} dm \mathbf{g} &= -dm g \hat{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{T}_\alpha &= -T_\alpha \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + T_\alpha \sin \alpha \hat{\mathbf{y}} \simeq -T_\alpha \hat{\mathbf{x}} + T_\alpha \alpha \hat{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{T}_\beta &= T_\beta \cos \beta \hat{\mathbf{x}} + T_\beta \sin \beta \hat{\mathbf{y}} \simeq T_\beta \hat{\mathbf{x}} + T_\beta \beta \hat{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{F}_e &= \mathbf{F}_e = dm a_0(x) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (9.86)$$

où les approximations ont été faites dans la limite des petits angles, c'est-à-dire $\alpha \ll 1$ et $\beta \ll 1$, et $a_0(x)$ est la norme de l'accélération d'entraînement maximale. L'équation vectorielle du mouvement vertical de l'élément infinitésimal de corde s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{T}_\alpha + \mathbf{T}_\beta + \mathbf{F}_e + dm \mathbf{g} = dm \ddot{\mathbf{y}}. \quad (9.87)$$

Dans la limite des petits angles, la projection de l'équation du mouvement selon les axes de coordonnées cartésiennes s'écrit,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : & \quad -T_\alpha + T_\beta = 0, \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : & \quad -T_\alpha \alpha + T_\beta \beta + dm \left(a_0(x) - g \cos(\omega t) \right) = dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (9.88)$$

D'après la projection de l'équation du mouvement le long de l'axe des abscisses, les normes des tensions sont égales,

$$T = T_\alpha = T_\beta. \quad (9.89)$$

Dans la limite des petits angles,

$$\begin{aligned}\alpha &\simeq \tan \alpha = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}, \\ \beta &\simeq \tan \beta = \frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x},\end{aligned}\quad (9.90)$$

Par conséquent, la projection de l'équation du mouvement le long de l'axe des ordonnées divisée par la norme de la tension T s'écrit,

$$\frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} - \frac{dm}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{dm}{T} (g - a_0(x) \cos(\omega t)). \quad (9.91)$$

Compte tenu de l'identité,

$$\frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx, \quad (9.92)$$

de la densité linéique de masse de la corde,

$$\mu = \frac{dm}{dx}, \quad (9.93)$$

et du fait que pour une corde suffisamment tendue, le poids de l'élément de corde est négligeable par rapport à son poids,

$$dm g \ll T, \quad (9.94)$$

l'équation du mouvement vertical de la corde (9.91) divisé par dx devient,

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{T} a_0(x) \cos(\omega t). \quad (9.95)$$

A l'aide de la vitesse de propagation du son dans la corde,

$$c_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (9.96)$$

l'équation du mouvement de la corde (9.95) est une équation d'onde avec un terme d'entraînement dans le membre de droite,

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{a_0(x)}{c_s^2} \cos(\omega_0 t). \quad (9.97)$$

A présent, on exprime les termes de l'équation d'onde à l'aide de transformées de Fourier inverses par rapport au temps t ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{y}(x, \omega)}{\partial x^2} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}''(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \tilde{y}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \cos(\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega.\end{aligned}\quad (9.98)$$

où la dernière identité est due au fait que $\omega_0 > 0$. Par conséquent, l'équation du mouvement de la corde (9.97) devient,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{y}''(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c_s^2} \tilde{y}(x, \omega) \right) e^{-i\omega t} d\omega &= \\ = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0(x)}{c_s^2} \delta(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega.\end{aligned}\quad (9.99)$$

Compte tenu de la relation de dispersion de l'onde stationnaire,

$$k = \frac{\omega}{c_s}, \quad (9.100)$$

du terme d'entraînement,

$$\tilde{f}(x, \omega) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0(x)}{c_s^2} \delta(\omega - \omega_0), \quad (9.101)$$

et de l'identification,

$$y(x) = \tilde{y}(x, \omega) \quad \text{et} \quad f(x) = \tilde{f}(x, \omega), \quad (9.102)$$

l'intégrant de la transformée inverse de Fourier (9.99) de l'onde correspond à l'équation de Helmholtz inhomogène,

$$y''(x) + k^2 y(x) = f(x). \quad (9.103)$$

qui peut être écrite en termes des opérateurs différentiels linéaires \mathcal{D} et \mathcal{L} comme,

$$\mathcal{D} y(x) = (\mathcal{L} + k^2 \hat{1}) y(x) = f(x). \quad (9.104)$$

L'équation homogène de Helmholtz homogène, c'est-à-dire en absence de terme d'entraînement $f(x)$, pour les fonctions propres $y_n(x)$ s'écrit,

$$y_n''(x) + k_n^2 y_n(x) = 0, \quad (9.105)$$

où le nombre d'onde dépend de n , c'est-à-dire $k \rightarrow k_n$, comme on va le montrer. Compte tenu de l'opérateur différentiel linéaire,

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}, \quad (9.106)$$

où les coefficients de l'opérateur différentiel (9.2) sont les suivants,

$$p_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad p_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad p_2(x) = 1. \quad (9.107)$$

l'équation aux valeurs propres pour les fonctions propres correspondantes $y_n(x)$ s'écrit,

$$y_n''(x) = \mathcal{L} y_n(x) = \lambda_n y_n(x). \quad (9.108)$$

Ainsi, la valeur propre λ_n est l'opposé du carré du nombre d'onde k_n ,

$$\lambda_n = -k_n^2. \quad (9.109)$$

Par conséquent, la fonction poids (9.16) vaut l'unité,

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp\left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx'\right) = 1, \quad (9.110)$$

ce qui implique que les fonctions propres $y_n(x)$ satisfont la condition d'orthonormalité,

$$\langle y_m | y_n \rangle = \int_0^L y_m^*(x) y_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (9.111)$$

La corde horizontale de longueur L est maintenue fixe à ses extrémités. Les fonctions propres satisfont donc les conditions aux bords,

$$y_n(0) = y_n(L) = 0. \quad (9.112)$$

Compte tenu de ces conditions, les fonctions propres sont les termes d'une série de Fourier impaires (Fig. 9.2),

$$y_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (9.113)$$

En substituant les fonctions propres (9.113) dans l'équation aux valeurs propres (9.108),

$$y_n''(x) = -\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \lambda_n b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (9.114)$$

on en conclut que les valeurs propres sont,

$$\lambda_n = -k_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (9.115)$$

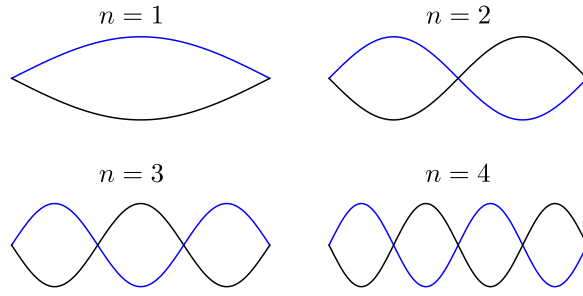


FIGURE 9.2 Fonctions propres $y_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ où $b_n < 0$ (bleu) et $b_n > 0$ (noir).

Afin de déterminer les coefficients b_n , on exprime explicitement la condition d'orthonormalité (9.111) en termes des fonctions propres (9.113),

$$\langle y_m | y_n \rangle = b_m^* b_n \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}. \quad (9.116)$$

Compte tenu de la relation d'orthonormalité des séries de Fourier réelles,

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}, \quad (9.117)$$

le carré de la valeur absolue des coefficients réels b_n s'écrit,

$$|b_n|^2 = b_n^* b_n = \frac{2}{L} \quad \text{ainsi} \quad b_n = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (9.118)$$

Par conséquent, les fonctions propres normées sont,

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (9.119)$$

Compte tenu des valeurs propres (9.115) et de la fonction propre normées (9.119), la fonction de Green (9.80) associée à l'équation de Helmholtz inhomogène (9.104) s'écrit,

$$\begin{aligned} G(x - x') &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} y_n(x) y_n^*(x') \\ &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right). \end{aligned} \quad (9.120)$$

En substituant la fonction de Green (9.120) dans le produit de convolution (9.79) on obtient la solution stationnaire de l'équation de Helmholtz inhomogène (9.104),

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x - x') f(x') dx' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) f(x') dx', \end{aligned} \quad (9.121)$$

où $f(x')$ est le terme d'entraînement qui satisfait les conditions aux bords,

$$f(0) = f(L) = 0. \quad (9.122)$$

Compte tenu des conditions aux bords (9.122), le terme d'entraînement peut être écrite une série de Fourier impaire,

$$f(x') = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\left(\frac{m\pi x'}{L}\right). \quad (9.123)$$

Compte de la relation d'orthonormalité (9.117), en substituant le terme d'entraînement (9.123) dans la solution stationnaire de l'équation de Helmholtz inhomogène,

celle-ci devient,

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_m}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) dx' \\
 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_m}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \delta_{mn},
 \end{aligned} \tag{9.124}$$

qui se réduit à,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{9.125}$$

Ainsi, en décomposant en série de Fourier impaire le terme d'entraînement $f(x')$, on détermine alors la solution stationnaire de l'équation de Helmholtz inhomogène (9.104), qui est aussi une série de Fourier impaire.

10

Fonctions de Bessel

10.1 Introduction

A l'aide de la méthode de séparation des variables qui consiste à factoriser une fonction de plusieurs variables comme le produit de fonctions séparées de chaque variable, une équation différentielle aux dérivées partielles peut être remise en forme comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces fonctions dépendent de coefficients de proportionnalité. La solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles est donc une combinaison linéaire de fonctions propres indicées par les coefficients de proportionnalité. En physique quantique, ces coefficients sont les nombres quantiques.

Premièrement, on applique la méthode de séparation des variables afin de résoudre l'équation de Helmholtz en coordonnées cartésiennes en sect 10.2. Deuxièmement, à l'aide du laplacien en coordonnées polaires, établi en sect. 10.3, on résout l'équation de Helmholtz en coordonnées polaires en sect. 10.4. La partie radiale de cette équation donne lieu à une équation différentielle ordinaire qui est exprimée à l'aide d'une variable sans dimension en sect. 10.5. Cette équation est l'équation de Bessel dont les solutions sont les fonctions radiales $K_m(x)$ qui sont des combinaisons linéaire des fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ et des fonctions de Bessel de deuxième espèce $Y_m(x)$. Les fonctions de Bessel de première espèce sont continues en $x = 0$ alors que les fonctions de Bessel de deuxième espèce sont discontinues à l'origine. Dans la plupart des problèmes physiques, les solutions sont continues en $x = 0$, et par conséquent, les fonctions de Bessel de première espèce sont les plus utiles dans la pratique. Les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ sont impaires si m est impair et paires si m est pair. L'équation de Bessel est mise sous la forme de Sturm-Liouville pour les fonctions de Bessel $J_m(x)$ ou $Y_m(x)$ en sect 10.6. La solution de l'équation de Helmholtz en coordonnées polaires, si elle est continue en $x = 0$, est exprimée comme produit d'une fonction de Bessel de première espèce et d'une série de Fourier réelle en sect. 10.7.

Comme premier exemple d'application physique des fonctions de Bessel, on décrit la dynamique quantique d'une particule de masse m confinée sur un disque de rayon r et d'épaisseur négligeable en sect. 10.8. L'équation de Schrödinger en deux dimensions est mise sous la forme d'une équation de Helmholtz en coordonnées polaires. La partie radiale est décrite par des fonctions de Bessel de première espèce. La condition radiale de confinement de la particule détermine les zéros k_{mn} des fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ et quantifie les nombres d'ondes k_{mn} . On détermine alors la fonction d'onde $\psi(\rho, \varphi)$ ainsi que les niveaux d'énergie E_{nm} .

En guise de deuxième exemple physique, on décrit les modes de vibrations d'une membrane circulaire élastique de rayon $\rho = r$ maintenue fixe sur son bord en sect. 10.9. Ces vibrations sont des déformations verticales dont on étudie l'évolution temporelle. La déformation verticale est décomposée en fonctions propres z_{mn} . La partie radiale est décrite par des fonctions de Bessel de première espèce et les parties angulaire et temporelle sont des ondes planes. La condition de bord imposée pour maintenir la membrane fixe quantifie les longueurs d'ondes k_{mn} . En régime stationnaire, les modes de vibrations sont décrits par les modes de vibrations mn . Les animations pour les modes $m = 0, 1, 2$ et $n = 1, 2, 3$ sont illustrés graphiquement.

10.2 Equation de Helmholtz cartésienne

L'équation d'onde en trois dimensions sans terme d'entraînement est exprimée dans l'espace réciproque de Fourier temporel comme une équation de Helmholtz homogène pour le champ scalaire en coordonnées cartésiennes $\phi(x, y, z)$,

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) + k^2 \phi(x, y, z) = 0, \quad (10.1)$$

où le nombre d'onde k est liée à la pulsation ω et à la vitesse de propagation de l'onde c_s par la relation de dispersion,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}. \quad (10.2)$$

Le laplacien s'écrit en coordonnées cartésiennes,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (10.3)$$

Compte tenu du laplacien en coordonnées cartésiennes (10.3), l'équation de Helmholtz s'exprime en coordonnées cartésiennes comme,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 \phi(x, y, z) = 0. \quad (10.4)$$

Afin de résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise la méthode de séparation des variables,

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (10.5)$$

Pour que la méthode de séparation des variables puisse être appliquée, il faut que l'équation différentielle soit linéaire et homogène et que les conditions initiales le soient également. L'équation différentielle (10.5) satisfait clairement le cahier des charges. On choisit donc des conditions initiales qui permettent l'usage de cette méthode. En substituant le champ scalaire $\phi(x, y, z)$ dans l'équation différentielle aux dérivées partielles (10.4), elle devient,

$$\begin{aligned} Y(y) Z(z) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) Z(z) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \\ + X(x) Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 X(x) Y(y) Z(z) = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

L'équation différentielle (10.6) divisée par le champ scalaire $\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$ s'écrit,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (10.7)$$

Les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ et $Z(z)$ sont des fonctions de variables indépendantes qui satisfont chacune une équation différentielle ordinaire séparée. La fonction $X(x) \equiv X_{n_x}(x)$ dépend d'une constante n_x , la fonction $Y(y) \equiv Y_{n_y}(y)$ dépend d'une constante n_y et par conséquent la fonction $Z(z) \equiv Z_{n_x, n_y}(z)$ dépend des constantes n_x et n_y ,

$$\frac{1}{X_{n_x}(x)} \frac{d^2 X_{n_x}(x)}{dx^2} = -n_x^2 = \text{cste}, \quad (10.8)$$

$$\frac{1}{Y_{n_y}(y)} \frac{d^2 Y_{n_y}(y)}{dy^2} = -n_y^2 = \text{cste}, \quad (10.9)$$

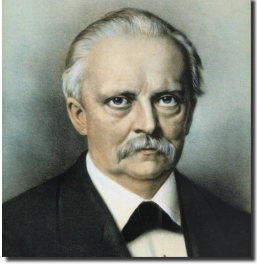
$$\frac{1}{Z_{n_x, n_y}(z)} \frac{d^2 Z_{n_x, n_y}(z)}{dz^2} = -(k^2 - n_x^2 - n_y^2). \quad (10.10)$$

où les constantes $n_x \in \mathbb{Z}$ et $n_y \in \mathbb{Z}$ ont été choisies afin d'obtenir des solutions périodiques. Les solutions des équations différentielles ordinaires (10.8), (10.9) et (10.10) sont,

$$X_{n_x}(x) = X_{n_x}(0) e^{in_x x}, \quad (10.11)$$

$$Y_{n_y}(y) = Y_{n_y}(0) e^{in_y y}, \quad (10.12)$$

$$Z_{n_x, n_y}(z) = Z_{n_x, n_y}(0) e^{i\sqrt{k^2 - n_x^2 - n_y^2} z}. \quad (10.13)$$



Hermann von
Helmholtz

Les solutions de l'équation différentielle de Helmholtz en coordonnées cartésiennes (10.4) sont les fonctions propres,

$$\phi_{n_x n_y}(x, y, z) = X_{n_x}(x) Y_{n_y}(y) Z_{n_x n_y}(z). \quad (10.14)$$

En substituant les solutions des équations différentielles ordinaires (10.11), (10.12) et (10.13) dans la séparation des variables des fonctions propres (10.14), celles-ci deviennent,

$$\phi_{n_x n_y}(x, y, z) = \phi_{n_x n_y}(0, 0, 0) e^{in_x x} e^{in_y y} e^{i\sqrt{k^2 - n_x^2 - n_y^2} z}, \quad (10.15)$$

où les fonctions propres à l'origine sont,

$$\phi_{n_x n_y}(0, 0, 0) = X_{n_x}(0) Y_{n_y}(0) Z_{n_x n_y}(0) \in \mathbb{C}. \quad (10.16)$$

10.3 Laplacien en coordonnées polaires

Afin d'obtenir l'équation de Helmholtz en coordonnées polaires, on doit exprimer le laplacien en coordonnées polaires. La différentielle du champ scalaire $\phi(\rho, \varphi)$ en coordonnées polaires s'écrit,

$$d\phi(\rho, \varphi) = \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\varphi} d\varphi. \quad (10.17)$$

Compte tenu du changement de variables,

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} = \rho \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \rho \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}, \quad (10.18)$$

et du changement de base,

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}, \quad (10.19)$$

le vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$ s'écrit en coordonnées polaires comme,

$$d\mathbf{r} = d\rho (\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) + \rho d\varphi (-\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}) = d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (10.20)$$

Compte tenu du changement de base (10.19), la différentielle du champ scalaire (10.17) peut être mise sous la forme,

$$d\phi(\rho, \varphi) = \left(\frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \cdot (d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}). \quad (10.21)$$

Par définition, la différentielle du champ scalaire $d\phi(\rho, \varphi, z)$ est le produit scalaire du gradient du champ scalaire $\phi(\rho, \varphi, z)$ et du déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$,

$$d\phi(\rho, \varphi) = \nabla \phi(\rho, \varphi) \cdot d\mathbf{r}(\rho, \varphi). \quad (10.22)$$

En identifiant les membres de droite des équations (10.21) et (10.22), compte tenu de l'équation (10.20), on en déduit que le gradient du champ scalaire s'écrit en coordonnées polaires,

$$\nabla \phi(\rho, \varphi) = \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi). \quad (10.23)$$

Par conséquent, l'opérateur gradient s'écrit en coordonnées polaires comme,

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (10.24)$$

Les dérivées partielles des vecteurs unitaires du repère polaires s'écrivent,

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\rho} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\rho} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\varphi} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}. \quad (10.25)$$



Pierre-Simon de
Laplace

Compte tenu des dérivées des vecteurs de base (10.25), le laplacien en coordonnées polaires, obtenu en prenant le produit scalaire de l'opérateur gradient (10.24) avec lui-même, s'écrit,

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left(\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\quad (10.26)$$

Ainsi, le laplacien du champ scalaire en coordonnées polaires s'écrit,

$$\nabla^2 \phi(\rho, \varphi) = \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2}.\quad (10.27)$$

10.4 Equation de Helmholtz polaire

L'équation d'onde en deux dimensions sans terme d'entraînement est exprimée dans l'espace réciproque de Fourier temporel en coordonnées polaires comme une équation de Helmholtz homogène pour le champ scalaire $\phi(\rho, \varphi)$,

$$\nabla^2 \phi(\rho, \varphi) + k^2 \phi(\rho, \varphi) = 0,\quad (10.28)$$

où le nombre d'onde k est liée à la pulsation ω et à la vitesse de propagation de l'onde c_s par la relation de dispersion (10.2). Compte tenu du laplacien en coordonnées polaires (10.27), l'équation de Helmholtz s'exprime en coordonnées polaires comme,

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 \phi(\rho, \varphi) = 0.\quad (10.29)$$

Afin de résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise la méthode de séparation des variables,

$$\phi(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi),\quad (10.30)$$

où $R(\rho)$ est une fonction radiale et $\Phi(\varphi)$ est une fonction azimutale. En substituant le champ scalaire $\phi(\rho, \varphi)$ dans l'équation différentielle (10.29), elle devient,

$$\Phi(\varphi) \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2 R(\rho) \Phi(\varphi) = 0.\quad (10.31)$$

L'équation différentielle (10.31) divisée par le champ scalaire $\phi(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi)$ s'écrit,

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + k^2 \rho^2 + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0.\quad (10.32)$$

Les fonctions $R(\rho)$ et $\Phi(\varphi)$ sont des fonctions de variables indépendantes qui satisfont chacune une équation différentielle ordinaire séparée. La fonction radiale $R(\rho) \equiv R_m(\rho)$ et la fonction azimutale $\Phi(\varphi) \equiv \Phi_m(\varphi)$ dépendent d'une constante m ,

$$\frac{1}{\Phi_m(\varphi)} \frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 = \text{cste},\quad (10.33)$$

$$\frac{\rho^2}{R_m(\rho)} \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R_m(\rho)} \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + k^2 \rho^2 = m^2,\quad (10.34)$$

où la constante $m \in \mathbb{Z}$ a été choisie afin que la partie angulaire ait une périodicité de 2π . La solution de l'équation différentielle ordinaire (10.33) est,

$$\Phi_m(\varphi) = \Phi_m(0) e^{im\varphi}.\quad (10.35)$$

L'équation différentielle pour la partie radiale (10.34) multipliée par la fonction radiale $R_m(\rho)$ s'écrit,

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - m^2) R_m(\rho) = 0.\quad (10.36)$$

Les solutions de l'équation différentielle de Helmholtz en coordonnées polaires (10.29) sont les fonctions propres,

$$\phi_m(\rho, \varphi) = R_m(\rho) \Phi_m(\varphi). \quad (10.37)$$

10.5 Equation de Bessel

Afin de montrer que l'équation différentielle radiale (10.36) est une équation de Bessel, on définit la variable sans dimension,

$$x = k\rho, \quad (10.38)$$

et on introduit la fonction radiale,

$$K_m(x) = K_m(k\rho) = R_m(\rho), \quad (10.39)$$

qui satisfait l'équation différentielle radiale,

$$\rho^2 \frac{d^2 K_m(k\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dK_m(k\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - m^2) K_m(k\rho) = 0. \quad (10.40)$$

Compte tenu des définitions (10.38) et (10.39), et à l'aide des opérateurs différentiels,

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = k \frac{d}{dx} \quad \text{ainsi} \quad \frac{d^2}{d\rho^2} = k \frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} \right) = k^2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad (10.41)$$

l'équation différentielle radiale (10.40) devient l'équation de Bessel,

$$x^2 K_m''(x) + x K_m'(x) + (x^2 - m^2) K_m(x) = 0. \quad (10.42)$$

Compte tenu de l'identité (10.39) et de la fonction angulaire (10.35), les fonctions propre (10.37) peuvent être écrites comme combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première espèce $J_m(k\rho)$ et de deuxième espèce $Y_m(k\rho)$,

$$\phi_m(\rho, \varphi) = K_m(k\rho) \Phi_m(\varphi) = \left(a_m J_m(k\rho) + b_m Y_m(k\rho) \right) e^{im\varphi}, \quad (10.43)$$

où les coefficients complexes a_m et b_m sont proportionnels à $\Phi_m(0)$.

10.6 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(k\rho)$ sont continues en $x = 0$ (Fig 10.1) et les fonctions de Bessel de deuxième espèce $Y_m(k\rho)$ sont discontinues en $x = 0$ (Fig 10.2). Comme la plupart des problèmes physiques qui ont une symétrie polaire sont continus à l'origine les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(k\rho)$ sont en général plus utiles que les fonctions de Bessel de deuxième espèce $Y_m(k\rho)$, aussi appelées fonctions de Neumann. En écrivant l'équation différentielle de Bessel (10.42) comme,

$$p_2(x) K_m''(x) + p_1(x) K_m'(x) + (p_0(x) - \lambda_m) K_m(x) = 0, \quad (10.44)$$

on en déduit que,

$$p_2(x) = x^2 \quad \text{et} \quad p_1(x) = x \quad \text{et} \quad p_0(x) = x^2 \quad \text{et} \quad \lambda_m = m^2. \quad (10.45)$$

Ainsi la fonction poids s'écrit,

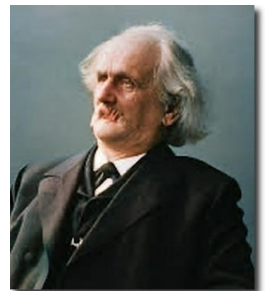
$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp\left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx'\right) = \frac{1}{x^2} \exp\left(\int^x \frac{dx'}{x'}\right) = \frac{1}{x}. \quad (10.46)$$

et la forme de Sturm-Liouville de l'équation de Bessel est,

$$\frac{d}{dx} \left(w(x) p_2(x) K_m'(x) \right) + (p_0(x) - \lambda_m) w(x) K_m(x) = 0. \quad (10.47)$$



Friedrich Wilhelm
Bessel



Carl Neumann

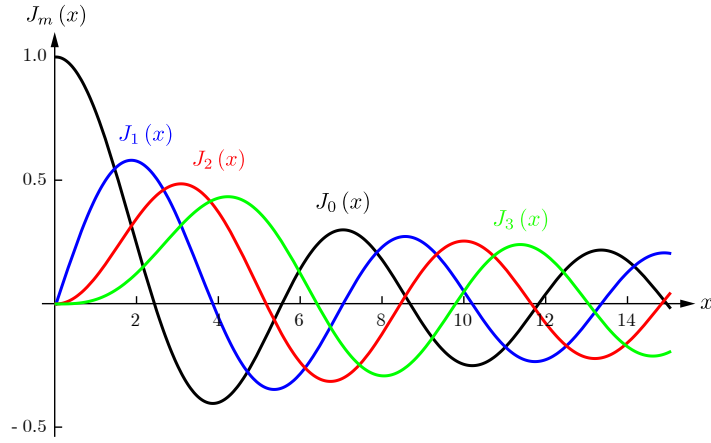


FIGURE 10.1 Fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ continue en $x = 0$ dont la parité et celle de coefficient n .

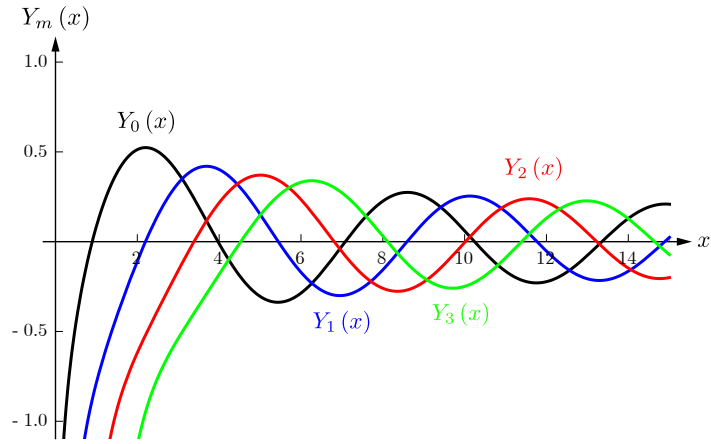


FIGURE 10.2 Fonctions de Bessel de deuxième espèce $Y_m(x)$ discontinue en $x = 0$.

Compte tenu des polynômes (10.45), de la fonction poids (10.46) et des fonctions propres (10.43), les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ et de deuxième espèce $Y_m(x)$ satisfont les équations de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left(x J_m'(x) \right) + \left(x - \frac{m^2}{x} \right) J_m(x) = 0, \quad (10.48)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x Y_m'(x) \right) + \left(x - \frac{m^2}{x} \right) Y_m(x) = 0. \quad (10.49)$$

10.7 Solutions de l'équation de Helmholtz polaire

L'équation différentielle de Helmholtz avec une symétrie polaire n'a pas de discontinuité physique en $x = 0$. Par conséquent, les coefficients b_m multipliant les fonctions de Bessel de deuxième espèce sont tous nuls, c'est-à-dire que $b_m = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, compte tenu de la décomposition des fonctions propres (10.43), les fonctions propres $\phi(\rho, \varphi) \equiv \phi_m(\rho, \varphi)$ ont la forme suivante,

$$\phi_m(\rho, \varphi) = a_m J_m(k\rho) e^{im\varphi}. \quad (10.50)$$

Etant donné que les fonctions propres $\phi_m(\rho, \varphi)$ sont des fonctions à valeurs réelles, elles peuvent être décomposées en coefficients de Fourier réels comme suit,

$$\phi_m(\rho, \varphi) = \left(A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi) \right) J_m(k\rho). \quad (10.51)$$

10.8 Particule libre confinée sur un disque

Une particule de masse m est confinée sur un disque de rayon r et d'épaisseur négligeable. La dynamique quantique de la particule libre est décrite par l'opérateur hamiltonien,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla) \cdot (-i\hbar \nabla) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2. \quad (10.52)$$

Dans un état stationnaire, la fonction d'onde $\psi(x, y)$ qui décrit l'état quantique de la particule satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire, qui est une équation aux valeurs propres pour l'opérateur hamiltonien \hat{H} ,

$$\hat{H} \psi(x, y) = E \psi(x, y). \quad (10.53)$$

La fonction d'onde $\psi(x, y)$ est continue au centre du disque en $x = y = 0$. Compte tenu du laplacien en coordonnées cartésiennes (10.3), l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées cartésiennes s'écrit,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = E \psi(x, y). \quad (10.54)$$

L'équation de Helmholtz correspondante est,

$$\nabla^2 \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0, \quad (10.55)$$

où le nombre d'onde est défini comme,

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (10.56)$$

Compte tenu de l'identification $\psi(\rho, \varphi) = \psi(x, y)$ et du laplacien en coordonnées polaires (10.27), l'équation de Helmholtz en coordonnées polaires s'écrit,

$$\frac{\partial^2 \psi(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi(\rho, \varphi) = 0. \quad (10.57)$$

Les solutions de l'équation de Helmholtz pour la fonction d'onde, sont les fonctions propres $\psi(\rho, \varphi) \equiv \psi_m(\rho, \varphi)$ continues à l'origine en $\rho = 0$, c'est-à-dire que $b_m = 0$ pour tout m ,

$$\psi_m(\rho, \varphi) = a_m J_m(k\rho) e^{im\varphi}. \quad (10.58)$$

La condition de confinement de la particule sur le disque de rayon r s'écrit,

$$\psi_m(\rho, \varphi) = 0 \quad \text{si} \quad \rho \geq r. \quad (10.59)$$

Par conséquent, en évaluant la fonction d'onde sur le bord du disque, elle s'annule,

$$\psi_m(r, \varphi) = a_m J_m(kr) e^{im\varphi} = 0. \quad (10.60)$$

On en déduit que les zéros de la fonction de Bessel de première espèce x_{mn} satisfont la condition (Fig. 10.3),

$$J_m(x_{mn}) = J_m(k_{mn} r) = 0 \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (10.61)$$

ce qui quantifie les nombres d'ondes $k \equiv k_{mn}$,

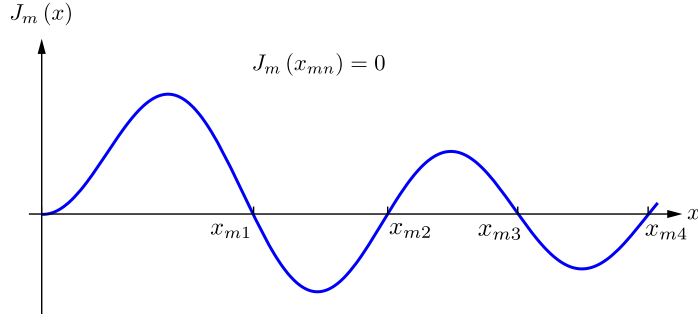
$$k_{mn} = \frac{x_{mn}}{r}. \quad (10.62)$$

Ainsi, compte tenu des nombres d'onde (10.62), les fonctions propres associées à la fonctions d'onde (10.58) de la particule libre $\psi_m(\rho, \varphi) \equiv \psi_{mn}(\rho, \varphi)$ dépendent des indices $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi_{mn}(\rho, \varphi) = a_m J_m(k_{mn} \rho) e^{im\varphi}. \quad (10.63)$$

Compte tenu de la définition du nombre d'onde (10.56) de la particule libre et de sa quantification, les niveaux d'énergie correspondants de la particule libre sont,

$$E_{mn} = \frac{\hbar^2 k_{mn}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 x_{mn}^2}{2mr^2}. \quad (10.64)$$

FIGURE 10.3 Zéros x_{mn} de la fonction de Bessel de première espèce $J_m(x)$.

10.9 Membrane circulaire vibrante

Afin de modéliser l'évolution temporelle des vibrations d'une membrane circulaire de rayon $\rho = r$ et d'épaisseur négligeable fixée au bord, on se base sur l'équation d'onde pour la coordonnée verticale $z(\rho, \varphi, t)$,

$$\nabla^2 z(\rho, \varphi, t) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 z(\rho, \varphi, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (10.65)$$

Compte tenu du laplacien en coordonnées polaires (10.27), l'équation d'onde en coordonnées polaires (10.65) s'écrit,

$$\frac{\partial^2 z(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 z(\rho, \varphi, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (10.66)$$

Afin de résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise la méthode de séparation des variables,

$$z(\rho, \varphi, t) = R(\rho) \Phi(\varphi) T(t). \quad (10.67)$$

En substituant la coordonnée verticale $z(\rho, \varphi, t)$ dans l'équation différentielle (10.66), elle devient,

$$\frac{1}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0. \quad (10.68)$$

Les fonctions $R(\rho)$, $\Phi(\varphi)$ et $T(t)$ sont des fonctions de variables indépendantes qui satisfont chacune une équation différentielle ordinaire séparée. La fonction radiale $R(\rho) \equiv R_m(\rho)$ et la fonction azimutale $\Phi(\varphi) \equiv \Phi_m(\varphi)$ dépendent d'une constante m ,

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -c_s^2 k^2, \quad (10.69)$$

$$\frac{1}{\Phi_m(\varphi)} \frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 = \text{cste}, \quad (10.70)$$

$$\frac{1}{R_m(\rho)} \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{R_m(\rho)} \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} = \frac{m^2}{\rho^2} - k^2. \quad (10.71)$$

Les équations différentielles ordinaires (10.70), (10.69) et (10.71) peuvent être remises en forme comme,

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - m^2) R_m(\rho) = 0, \quad (10.72)$$

$$\frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_m(\varphi) = 0, \quad (10.73)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + c_s^2 k^2 T(t) = 0. \quad (10.74)$$

Ainsi, les modes de déformation verticale $z(\rho, \varphi, t) \equiv z_m(\rho, \varphi, t)$ qui dépendent de m s'écrivent,

$$z_m(\rho, \varphi, t) = R_m(\rho) \Phi_m(\varphi) T(t). \quad (10.75)$$

La condition au bord pour le mode de déformation verticale de la membrane de rayon $\rho = r$ s'écrit,

$$z_m(r, \varphi, t) = 0. \quad (10.76)$$

Par analogie avec la particule libre confinée sur un disque (10.63), la condition au bord (10.76) contraint la partie radiale des fonctions propres qui s'écrit en termes des fonctions de Bessel de première espèce. Ainsi, les modes de déformation verticale qui dépendent de m et de n s'écrivent,

$$z_{mn}(\rho, \varphi, t) = a_m J_m(k_{mn} \rho) e^{im\varphi}, \quad (10.77)$$

où les nombres d'ondes $k \equiv k_{mn}$ sont quantifiés par les zéros x_{mn} de la fonction de Bessel de première espèce (10.62). A l'aide de la relation de dispersion quantifiée,

$$\omega_{mn} = c_s k_{mn}, \quad (10.78)$$

l'évolution temporelle $T(t)$, qui est solution de l'équation différentielle ordinaire (10.74), s'écrit,

$$T(t) = b^- e^{-i\omega_{mn} t} + b^+ e^{i\omega_{mn} t}. \quad (10.79)$$

Compte tenu des fonctions propres (10.77) et (10.79), les modes complexes de déformation verticale s'écrivent,

$$\begin{aligned} z_{mn}(\rho, \varphi, t) = & b^- a_m J_m(k_{mn} \rho) e^{i(m\varphi - \omega_{mn} t)} \\ & + b^+ a_m J_m(k_{mn} \rho) e^{i(m\varphi + \omega_{mn} t)}. \end{aligned} \quad (10.80)$$

Par conséquent, les modes réels de déformation verticale ont la forme suivante,

$$\begin{aligned} z_{mn}(\rho, \varphi, t) = & \left(A_m^- \cos(m\varphi - \omega_{mn} t) + B_m^- \sin(m\varphi - \omega_{mn} t) \right. \\ & \left. + A_m^+ \cos(m\varphi + \omega_{mn} t) + B_m^+ \sin(m\varphi + \omega_{mn} t) \right) J_m(k_{mn} \rho). \end{aligned} \quad (10.81)$$

En régime stationnaire, les amplitudes des ondes progressive et rétrograde sont égales,

$$a_m = \frac{1}{2} A_m^- = \frac{1}{2} A_m^+ \quad \text{et} \quad B_m = \frac{1}{2} B_m^- = \frac{1}{2} B_m^+. \quad (10.82)$$

A l'aide des formules de trigonométrie pour les angles $a = m\varphi$ et $b = \omega_{mn} t$,

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos(a) \cos(b), \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin(a) \cos(b), \end{aligned} \quad (10.83)$$

et des amplitudes égales (10.82), les modes de déformation verticale (10.81) deviennent,

$$z_{mn}(\rho, \varphi, t) = \left(A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi) \right) J_m(k_{mn} \rho) \cos(\omega_{mn} t). \quad (10.84)$$

Premièrement, les déformations verticales décrites par les modes $m = 0$, d'axe de symétrie verticale, ont des zéros pour n valeurs de la coordonnée radiale ρ (Fig. 10.4). Ces zéros se trouvent sur des cercles concentriques dont le rayon évolue périodiquement.

FIGURE 10.4 Animation des modes de déformation verticale $m = 0$ et $n = 1, 2, 3$: $z_{0,1}$, $z_{0,2}$, $z_{0,3}$ symétriques autour de l'axe Oz .

Deuxièmement, les déformations verticales décrites par les modes $m = 1$, sont symétriques selon l'axe des abscisses et antisymétriques selon l'axe des ordonnées (Fig. 10.5). L'origine reste fixe.

FIGURE 10.5 Animation des modes de déformation verticale $m = 1$ et $n = 1, 2, 3$: $z_{1,1}$, $z_{1,2}$, $z_{1,3}$ symétriques par rapport à l'axe Ox et antisymétriques par rapport à l'axe Oy .

Troisièmement, les déformations verticales décrites par les modes $m = 2$, sont symétriques selon l'axe des abscisses et antisymétriques selon l'axe des ordonnées (Fig. 10.6). L'origine reste également fixe.

FIGURE 10.6 Animation des modes de déformation verticale $m = 2$ et $n = 1, 2, 3$: $z_{2,1}$, $z_{2,2}$, $z_{2,3}$ symétriques par rapport aux axes Ox et Oy .

11

Moment cinétique quantique

11.1 Introduction

L'atome d'hydrogène est l'un des trois problèmes qui peut être entièrement résolu en physique quantique sans faire d'approximation. Les deux autres sont l'oscillateur harmonique et le rotateur rigide. Un atome d'hydrogène est une problème à deux corps où la masse du proton m_p est environ 1836 supérieure à la masse de l'électron m_e . On peut donc considérer le proton comme fixe et décrire le mouvement de l'électron interagissant avec le proton à travers un potentiel coulombien comme expliqué en sect. 11.4. Afin de décrire la dynamique de l'électron attiré par le proton, on fait une description en coordonnées sphériques afin de tirer profit de la symétrie du problème. On doit en particulier faire usage de l'opérateur laplacien ∇^2 en coordonnées sphériques qui est établi en sect. 11.2. La dynamique en rotation de l'électron est caractérisée par l'opérateur moment cinétique au carré \hat{L}^2 et la composante verticale de l'opérateur moment cinétique \hat{L}_z établis en sect. 11.3.

Les solutions stationnaires de la dynamique quantique de l'électron, c'est-à-dire les solutions indépendantes du temps de la fonction d'onde $\psi(\rho, \theta, \varphi)$, sont décrites par l'équation de Schrödinger stationnaire qui est une équation aux valeurs propres pour l'opérateur hamiltonien \hat{H} . La fonction d'onde est une somme des fonctions propres $\psi_{n\ell m}(\rho, \theta, \varphi)$ qui dépendent du nombre principal n du nombre azimutal ℓ et du nombre magnétique orbital m . À l'aide de la séparation des variables, les fonctions propres sont exprimées comme le produit d'une fonction radiale $R_{n\ell}(r)$ et d'une fonction angulaire $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ appelée harmonique sphérique.

Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ sont des fonctions propres des opérateurs moment cinétique au carré \hat{L}^2 et moment cinétique vertical \hat{L}_z de valeurs propres $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$ et $\hbar m$ respectivement, comme montré en sect. 11.6, grâce aux opérateurs d'échelle \hat{L}_+ et \hat{L}_- pour le moment cinétique établis en sect. 11.5. Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ peuvent être écrites comme le produit d'une fonction nodale $\Theta_\ell^m(\theta, \varphi)$ et d'une fonction azimutale $\Phi_\ell^m(\varphi)$. La fonction nodale $\Theta_\ell^m(\theta, \varphi)$ est solution d'une équation de Legendre généralisée et la fonction azimutale $\Phi_\ell^m(\varphi)$ un phaseur comme établi en sect. 11.7. Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ sont entièrement déterminées en sect. 11.8 par le calcul des constantes de normalisation.

L'équation de Schrödinger stationnaire donne l'équation différentielle pour la fonction radiale $R_{n\ell}(r)$. À l'aide de deux changements de variable successifs décrit en sect. 11.9 et 11.10, on montre que la fonction radiale $R_{n\ell}(r)$ est proportionnelle à un polynôme de Laguerre généralisé $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$ où a_0 est le rayon de Bohr.

11.2 Laplacien en coordonnées sphériques

Afin de décrire la dynamique quantique de l'atome d'hydrogène, qui a une symétrie sphérique, on doit au préalable établir le laplacien en coordonnées sphériques. La différentielle du champ scalaire $\phi(r, \theta, \varphi)$ en coordonnées sphériques s'écrit,

$$d\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} dr + \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial\theta} d\theta + \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial\varphi} d\varphi. \quad (11.1)$$

Compte tenu du changement de variables,

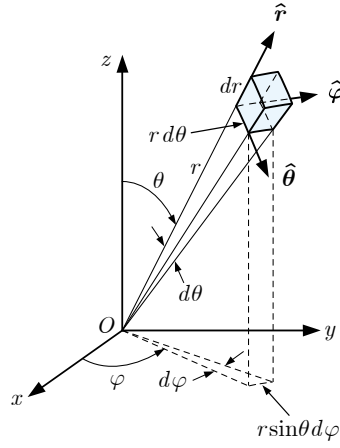


FIGURE 11.1 Le vecteur déplacement infinitésimal s'écrit en coordonnées sphériques $d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}} = r \sin\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + r \sin\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{y}} + r \cos\theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (11.2)$$

et du changement de base,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \sin\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin\theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin\varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

le vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$ s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dr (\sin\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}) \\ &\quad + r d\theta (\cos\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin\theta \hat{\mathbf{z}}) \\ &\quad + r \sin\theta d\varphi (-\sin\varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi \hat{\mathbf{y}}) \\ &= dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Compte tenu du changement de base (11.3), la différentielle du champ scalaire (11.1) peut être mise sous la forme,

$$\begin{aligned} d\phi(r, \theta, \varphi) &= \left(\frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \\ &\quad \cdot \left(dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Par définition, la différentielle $df(r, \theta, \varphi)$ est le produit scalaire du gradient de $f(r, \theta, \varphi)$ et du déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$,

$$d\phi(r, \theta, \varphi) = \nabla \phi(r, \theta, \varphi) \cdot d\mathbf{r}. \quad (11.6)$$

En identifiant les membres de droite des équations (11.5) et (11.6), compte tenu de l'équation (11.4), on en déduit que le gradient du champ scalaire s'écrit en coordonnées sphériques,

$$\nabla \phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi(r, \theta, \varphi)}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (11.7)$$

Par conséquent, l'opérateur gradient s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (11.8)$$

Les dérivées partielles des vecteurs unitaires du repère sphérique (11.3) s'écrivent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} &= \mathbf{0} & \text{et} & & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} &= \mathbf{0} & \text{et} & & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta} & \text{et} & & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{r} & \text{et} & & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} &= \sin \theta \hat{\varphi} & \text{et} & & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} &= \cos \theta \hat{\varphi} & \text{et} & & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\theta}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

Compte tenu des dérivées des vecteurs de base (11.9), le laplacien en composantes sphériques, obtenu en prenant le produit scalaire de l'opérateur gradient (11.8) avec lui-même, s'écrit,

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left(\hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(\hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \left(\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \left(\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \left(\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Finalement, le laplacien (11.10) peut être mis sous la forme suivante,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (11.11)$$

11.3 Opérateur moment cinétique

L'opérateur vectoriel moment cinétique est défini comme,

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i \hbar \mathbf{r} \times \nabla. \quad (11.12)$$

Compte tenu du gradient en coordonnées sphériques (11.8), l'opérateur vectoriel moment cinétique s'écrit,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} &= -i \hbar (r \hat{r}) \times \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= -i \hbar \left(\hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Compte tenu des dérivées des vecteurs de base (11.9), le carré de l'opérateur moment cinétique (11.13) s'écrit,

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\hbar^2}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &\quad - \hbar^2 \left(\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hbar^2}{\sin \theta} \left(\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{\sin \theta} \left(\hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hbar^2}{\sin^2 \theta} \left(\hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Le carré de l'opérateur moment cinétique (11.14) peut être mis sous la forme suivante,

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (11.15)$$

La composante verticale de l'opérateur vectoriel moment cinétique (11.13) s'écrit,

$$\hat{L}_z = \hat{z} \cdot \hat{\mathbf{L}} = -i\hbar \left(\hat{z} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{z} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (11.16)$$

Le laplacien en coordonnées sphériques (11.11) est exprimé en termes du carré de l'opérateur moment cinétique (11.15) comme,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{L}^2. \quad (11.17)$$

Le carré de l'opérateur moment cinétique s'écrit,

$$\hat{p}^2 = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = (-i\hbar \nabla) \cdot (-i\hbar \nabla) = -\hbar^2 \nabla^2. \quad (11.18)$$

A l'aide de l'opérateur (11.18) et de l'opérateur quantité de mouvement radiale au carré,

$$\hat{p}_r^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (11.19)$$

le laplacien (11.20) peut être mis en forme comme,

$$\nabla^2 = -\frac{1}{\hbar^2} \hat{p}^2 = -\frac{1}{\hbar^2} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right), \quad (11.20)$$

ce qui implique que,

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2}. \quad (11.21)$$

Etant donné que l'opérateur quantité de mouvement radiale au carré (11.19) ne dépend pas des angles θ et φ et que les opérateurs \hat{L}^2 et \hat{L}_z ne dépendent pas de r , ils commutent,

$$[\hat{p}_r^2, \hat{L}^2] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{p}_r^2, \hat{L}_z] = 0. \quad (11.22)$$

11.4 Atome d'hydrogène

Un atome d'hydrogène est constitué d'un noyau qui est un proton de masse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ kg et de charge électrique positive $-e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C et d'un électron de masse $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg et de charge électrique négative $e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ C. La masse réduite μ de ce système à deux corps s'écrit,

$$\mu = \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \right)^{-1} = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \simeq m_e, \quad (11.23)$$

compte tenu du rapport des masses $m_p/m_e \simeq 1836$. Par conséquent, dans l'étude de ce système, on peut considérer que le proton est fixe et décrire uniquement le mouvement de l'électron soumis à l'interaction électrostatique du proton. L'opérateur hamiltonien \hat{H} décrivant la dynamique de l'électron est la somme d'une contribution cinétique et d'une contribution potentielle,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + V(\hat{r}), \quad (11.24)$$

où l'opérateur énergie potentielle électrostatique est le potentiel coulombien attractif,

$$V(\hat{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \hat{1}, \quad (11.25)$$



Charles-Augustin de
Coulomb

et $\hat{1}$ est l'opérateur identité. Compte tenu de l'opérateur hamiltonien (11.24) de l'opérateur énergie potentielle électrostatique (11.25) et du carré de l'opérateur quantité de mouvement (11.18), la dynamique de l'électron en régime stationnaire, décrite par l'équation de Schrödinger stationnaire,

$$\hat{H} \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi), \quad (11.26)$$

s'écrit explicitement,

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}\right) \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi). \quad (11.27)$$

A l'aide de la relation opératorielle (11.17), l'équation de Schrödinger stationnaire (11.27) devient,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{2m_e r^2} \hat{L}^2 \psi(r, \theta, \varphi) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi). \quad (11.28)$$

Afin de résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire (11.28), on utilise la méthode de séparation des variables,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi), \quad (11.29)$$

où $R(r)$ est la fonction radiale et $Y(\theta, \varphi)$ est la fonction angulaire appelée harmonique sphérique. En substituant la séparation des variables (11.29) dans l'équation différentielle (11.28) et en la divisant par rapport à $\psi(r, \theta, \varphi)/2m_e r^2$ à l'aide du laplacien (11.20), elle devient,

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} Y(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) + \frac{1}{2m_e r^2} R(r) \hat{L}^2 Y(\theta, \varphi) \\ & - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} R(r) Y(\theta, \varphi) = E R(r) Y(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (11.30)$$

11.5 Opérateurs d'échelle

Ain de pouvoir résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire (11.30), on doit déterminer l'équation aux valeurs propres pour les opérateurs moment cinétique au carré \hat{L}^2 et moment cinétique vertical \hat{L}_z . Pour ce faire, il est nécessaire de définir des opérateurs d'échelle pour le moment cinétique. Les composantes cartésiennes de l'opérateur moment cinétique (11.12) s'écrivent,

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \hat{r}_y \hat{p}_z - \hat{r}_z \hat{p}_y, \\ \hat{L}_y &= \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \hat{r}_z \hat{p}_x - \hat{r}_x \hat{p}_z, \\ \hat{L}_z &= \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \hat{r}_x \hat{p}_y - \hat{r}_y \hat{p}_x. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Compte tenu des relations de commutation canoniques,

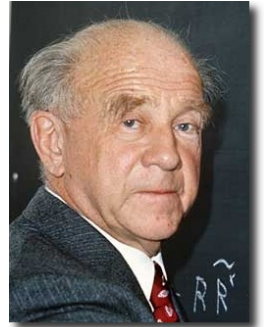
$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i \hbar \delta_{ij} \hat{1} \quad \text{ou} \quad \hat{r}_i \hat{p}_j = \hat{p}_j \hat{r}_i + i \hbar \delta_{ij} \hat{1}, \quad (11.32)$$

on déduit le commutateur entre les composantes de l'opérateur moment cinétique \hat{L}_x et \hat{L}_y ,

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= [(\hat{r}_y \hat{p}_z - \hat{r}_z \hat{p}_y), (\hat{r}_z \hat{p}_x - \hat{r}_x \hat{p}_z)] \\ &= [\hat{r}_y \hat{p}_z, \hat{r}_z \hat{p}_x] - [\hat{r}_y \hat{p}_z, \hat{r}_x \hat{p}_z] - [\hat{r}_z \hat{p}_y, \hat{r}_z \hat{p}_x] + [\hat{r}_z \hat{p}_y, \hat{r}_x \hat{p}_z]. \end{aligned} \quad (11.33)$$



Erwin Schrödinger



Werner Heisenberg

Compte tenu des relations de commutation canoniques (11.32),

$$\begin{aligned}
[\hat{r}_y \hat{p}_z, \hat{r}_z \hat{p}_x] &= \hat{r}_y \hat{p}_z \hat{r}_z \hat{p}_x - \hat{r}_z \hat{p}_x \hat{r}_y \hat{p}_z = \hat{r}_y \hat{p}_z \hat{r}_z \hat{p}_x - \hat{r}_y \hat{r}_z \hat{p}_z \hat{p}_x, \\
&= \hat{r}_y [\hat{p}_z, \hat{r}_z] \hat{p}_x = -i \hbar \hat{r}_y \hat{p}_x, \\
[\hat{r}_y \hat{p}_z, \hat{r}_x \hat{p}_z] &= \hat{r}_y \hat{p}_z \hat{r}_x \hat{p}_z - \hat{r}_x \hat{p}_z \hat{r}_y \hat{p}_z = \hat{p}_z \hat{r}_y \hat{r}_x \hat{p}_z - \hat{p}_z \hat{r}_x \hat{r}_y \hat{p}_z, \\
&= \hat{p}_z [\hat{r}_y, \hat{r}_x] \hat{p}_z = 0, \\
[\hat{r}_z \hat{p}_y, \hat{r}_z \hat{p}_x] &= \hat{r}_z \hat{p}_y \hat{r}_z \hat{p}_x - \hat{r}_z \hat{p}_x \hat{r}_z \hat{p}_y = \hat{r}_z \hat{p}_y \hat{p}_x \hat{r}_z - \hat{r}_z \hat{p}_x \hat{p}_y \hat{r}_z, \\
&= \hat{r}_z [\hat{p}_y, \hat{p}_x] \hat{r}_z = 0, \\
[\hat{r}_z \hat{p}_y, \hat{r}_x \hat{p}_z] &= \hat{r}_z \hat{p}_y \hat{r}_x \hat{p}_z - \hat{r}_x \hat{p}_z \hat{r}_z \hat{p}_y = \hat{r}_x \hat{r}_z \hat{p}_z \hat{p}_y - \hat{r}_x \hat{p}_z \hat{r}_z \hat{p}_y, \\
&= \hat{r}_x [\hat{r}_z, \hat{p}_z] \hat{p}_y = i \hbar \hat{r}_x \hat{p}_y,
\end{aligned} \tag{11.34}$$

le commutateur (11.33) se réduit à

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i \hbar (\hat{r}_x \hat{p}_y - \hat{r}_y \hat{p}_x) = i \hbar \hat{L}_z. \tag{11.35}$$

Comme les composantes cartésiennes de l'opérateur moment cinétique (11.31) sont liées par une permutation cyclique des coordonnées cartésiennes $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, la permutation cyclique des indices dans la relation de commutation (11.35) donne trois relations de commutation,

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i \hbar \hat{L}_z & \text{ou} & \quad \hat{L}_x \hat{L}_y = \hat{L}_y \hat{L}_x + i \hbar \hat{L}_z, \\
[\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i \hbar \hat{L}_x & \text{ou} & \quad \hat{L}_y \hat{L}_z = \hat{L}_z \hat{L}_y + i \hbar \hat{L}_x, \\
[\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i \hbar \hat{L}_y & \text{ou} & \quad \hat{L}_z \hat{L}_x = \hat{L}_x \hat{L}_z + i \hbar \hat{L}_y.
\end{aligned} \tag{11.36}$$

L'opérateur moment cinétique au carré s'écrit en composantes cartésiennes,

$$\hat{L}^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \tag{11.37}$$

Compte tenu des relations de commutation (11.36), on déduit le commutateur entre les opérateurs \hat{L}^2 et \hat{L}_x ,

$$\begin{aligned}
[\hat{L}^2, \hat{L}_x] &= [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] \\
&= \hat{L}_y \hat{L}_y \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y \hat{L}_y + \hat{L}_z \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z \hat{L}_z \\
&= \hat{L}_y \hat{L}_x \hat{L}_y - i \hbar \hat{L}_y \hat{L}_z - \hat{L}_y \hat{L}_x \hat{L}_y - i \hbar \hat{L}_z \hat{L}_y \\
&\quad + \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_z + i \hbar \hat{L}_z \hat{L}_y - \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_z + i \hbar \hat{L}_y \hat{L}_z = 0.
\end{aligned} \tag{11.38}$$

La permutation cyclique des indices $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ dans la relation de commutation (11.38) donne trois relations de commutation,

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0. \tag{11.39}$$

Les opérateurs d'échelle pour le moment cinétique sont définis comme,

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i \hat{L}_y \quad \text{et} \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i \hat{L}_y. \tag{11.40}$$

Compte tenu des relations de commutation (11.36) et des opérateurs d'échelle (11.40), on obtient les relations de commutation suivantes,

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_z, \hat{L}_+] &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + i [\hat{L}_z, \hat{L}_y] = i \hbar \hat{L}_y + \hbar \hat{L}_x = \hbar \hat{L}_+, \\
[\hat{L}_z, \hat{L}_-] &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x] - i [\hat{L}_z, \hat{L}_y] = i \hbar \hat{L}_y - \hbar \hat{L}_x = -\hbar \hat{L}_-.
\end{aligned} \tag{11.41}$$

Au vu des opérateurs d'échelle (11.40) et des relations de commutation (11.39), on déduit les relations de commutation suivantes,

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_+] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_-] = 0. \tag{11.42}$$

11.6 Nombres quantiques associés à la rotation

Les fonctions propres associées à la rotation sont les harmoniques sphériques $Y(\theta, \varphi)$. L'équation aux valeurs propres de la composante verticale de l'opérateur moment cinétique (11.16) s'écrit,

$$\hat{L}_z Y(\theta, \varphi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} Y(\theta, \varphi) = L_z Y(\theta, \varphi). \quad (11.43)$$

où L_z est la fonction propre l'opérateur moment cinétique vertical \hat{L}_z . Les solutions de cette équation aux valeurs propres sont les harmoniques sphériques,

$$Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, 0) e^{\frac{i}{\hbar} L_z \varphi}. \quad (11.44)$$

Etant donné que l'angle azimutal $\varphi \in [0, 2\pi)$, l'harmonique sphérique (11.44) est équivalente à l'harmonique sphérique,

$$Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, 0) e^{\frac{i}{\hbar} L_z (\varphi + 2\pi)}. \quad (11.45)$$

L'identification des solutions (11.44) et (11.45) impose la condition,

$$e^{i2\pi \frac{L_z}{\hbar}} = 1, \quad (11.46)$$

qui est satisfaite si la composante verticale du moment cinétique est quantifiée,

$$L_z = \hbar m, \quad (11.47)$$

où $m \in \mathbb{Z}$ est le nombre quantique magnétique qui caractérise l'orientation de la rotation. Cette condition de quantification a été introduite comme axiome par Niels Bohr dans son modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène. De manière similaire, l'équation aux valeurs propres pour l'opérateur moment cinétique au carré est de la forme,

$$\hat{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \hbar^2 \lambda(\ell) Y(\theta, \varphi), \quad (11.48)$$

où la valeur propre $\lambda(\ell)$ est une fonction sans dimension du nombre quantique azimutal ℓ . Par conséquent, les harmoniques sphériques $Y(\theta, \varphi) \equiv Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ dépendent des nombres quantiques azimutal ℓ et magnétique m . Ainsi, l'équation aux valeurs propres (11.43) devient,

$$\hat{L}_z Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar m Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (11.49)$$

A l'aide des relations de commutations (11.41) et de l'équation aux valeurs propres (11.49), on obtient le résultat suivant,

$$\hat{L}_+ \hat{L}_+ Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \left(\hat{L}_+ \hat{L}_z + \hbar \hat{L}_+ \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar(m+1) \left(\hat{L}_+ Y_\ell^m(\theta, \varphi) \right). \quad (11.50)$$

L'équation aux valeurs propres (11.49) pour $m+1$ s'écrit,

$$\hat{L}_z Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi) = \hbar(m+1) Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi). \quad (11.51)$$

On en conclut donc que l'opérateur d'échelle \hat{L}_+ permet de passer de l'harmonique sphérique $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ à l'harmonique sphérique $Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi)$,

$$\hat{L}_+ Y_\ell^m(\theta, \varphi) = C_\ell^{m+1} Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi), \quad (11.52)$$

où C_ℓ^{m+1} est une constante de normalisation. A l'aide des relations de commutations (11.41) et de l'équation aux valeurs propres (11.49), on obtient le résultat suivant,

$$\hat{L}_z \hat{L}_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \left(\hat{L}_- \hat{L}_z - \hbar \hat{L}_- \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar(m-1) \left(\hat{L}_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) \right). \quad (11.53)$$

L'équation aux valeurs propres (11.49) pour $m-1$ s'écrit,

$$\hat{L}_z Y_\ell^{m-1}(\theta, \varphi) = \hbar(m-1) Y_\ell^{m-1}(\theta, \varphi). \quad (11.54)$$

On en conclut donc que l'opérateur d'échelle \hat{L}_- permet de passer de l'harmonique sphérique $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ à l'harmonique sphérique $Y_\ell^{m-1}(\theta, \varphi)$,

$$\hat{L}_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = C_\ell^{m-1} Y_\ell^{m-1}(\theta, \varphi), \quad (11.55)$$

où C_ℓ^{m-1} est une constante de normalisation. L'isotropie de l'espace \mathbb{R}^3 requiert qu'il n'y ait pas de corrélation entre les composantes cartésiennes de l'opérateur moment cinétique. Par conséquent, la valeur moyenne de la somme des carrés est la somme des carrés des valeurs moyennes (11.37),

$$\begin{aligned} \langle Y_\ell^m | \hat{L}^2 | Y_\ell^m \rangle &= \langle Y_\ell^m | \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 | Y_\ell^m \rangle = \\ &= \langle Y_\ell^m | \hat{L}_x^2 | Y_\ell^m \rangle + \langle Y_\ell^m | \hat{L}_y^2 | Y_\ell^m \rangle + \langle Y_\ell^m | \hat{L}_z^2 | Y_\ell^m \rangle. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Etant donné que les composantes cartésiennes de l'opérateur moment cinétique \hat{L}_x , \hat{L}_y et \hat{L}_z sont hermitiennes, c'est-à-dire $\hat{L}_x = \hat{L}_x^\dagger$, $\hat{L}_y = \hat{L}_y^\dagger$ et $\hat{L}_z = \hat{L}_z^\dagger$, les valeurs moyennes du carré de ces opérateurs sont définies positives,

$$\begin{aligned} \langle Y_\ell^m | \hat{L}_x^2 | Y_\ell^m \rangle &= \langle Y_\ell^m | \hat{L}_x^\dagger \hat{L}_x | Y_\ell^m \rangle = \| \hat{L}_x | Y_\ell^m \rangle \|^2 \geq 0, \\ \langle Y_\ell^m | \hat{L}_y^2 | Y_\ell^m \rangle &= \langle Y_\ell^m | \hat{L}_y^\dagger \hat{L}_y | Y_\ell^m \rangle = \| \hat{L}_y | Y_\ell^m \rangle \|^2 \geq 0, \\ \langle Y_\ell^m | \hat{L}_z^2 | Y_\ell^m \rangle &= \langle Y_\ell^m | \hat{L}_z^\dagger \hat{L}_z | Y_\ell^m \rangle = \| \hat{L}_z | Y_\ell^m \rangle \|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (11.57)$$

ce qui donne l'inégalité entre les valeurs moyennes des opérateurs \hat{L}^2 et \hat{L}_z^2 ,

$$\langle Y_\ell^m | \hat{L}^2 | Y_\ell^m \rangle \geq \langle Y_\ell^m | \hat{L}_z^2 | Y_\ell^m \rangle \geq 0. \quad (11.58)$$

Compte tenu du fait que les harmoniques sphériques sont orthonormées,

$$\langle Y_{\ell'}^{m'} | Y_\ell^m \rangle = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}, \quad (11.59)$$

la valeur moyenne de la composante verticale de l'opérateur moment cinétique (11.49) s'écrit,

$$\langle Y_\ell^m | \hat{L}_z^2 | Y_\ell^m \rangle = \hbar^2 m^2 \langle Y_\ell^m | Y_\ell^m \rangle = \hbar^2 m^2, \quad (11.60)$$

et la valeur moyenne du carré de l'opérateur moment cinétique (11.48) s'écrit,

$$\langle Y_\ell^m | \hat{L}^2 | Y_\ell^m \rangle = \hbar^2 \lambda(\ell) \langle Y_\ell^m | Y_\ell^m \rangle = \hbar^2 \lambda(\ell). \quad (11.61)$$

Compte tenu des valeurs moyennes (11.60) et (11.61), l'inégalité (11.58) devient,

$$\lambda(\ell) \geq m^2 \geq 0. \quad (11.62)$$

On définit le nombre quantique azimutal $\ell \in \mathbb{N}$ comme la valeur maximale du nombre quantique magnétique orbital m . Par conséquent, l'inégalité (11.62) devient,

$$-\ell \leq m \leq \ell. \quad (11.63)$$

En vertu de l'inégalité (11.63), le nombre quantique magnétique m ne peut pas être supérieur au nombre quantique azimutal ℓ . Par conséquent, pour $m = \ell$, la relation (11.52) devient,

$$\hat{L}_+ Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = 0. \quad (11.64)$$

Compte tenu des opérateurs d'échelle (11.40) et de la relation de commutation (11.35), on obtient l'identité opératorielle,

$$\begin{aligned} \hat{L}_- \hat{L}_+ &= (\hat{L}_x - i \hat{L}_y) (\hat{L}_x + i \hat{L}_y) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i (\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x) \\ &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z. \end{aligned} \quad (11.65)$$

A l'aide de l'identité opératorielle (11.65), l'opérateur moment cinétique au carré (11.37) peut être entièrement exprimé en termes des opérateurs \hat{L}_z , \hat{L}_+ et \hat{L}_- comme,

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hbar \hat{L}_z + \hat{L}_z^2. \quad (11.66)$$

Compte tenu de la condition (11.64), l'équation aux valeurs propres pour le carré de l'opérateur moment cinétique s'écrit,

$$\hat{L}^2 Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = (\hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z + \hat{L}_- \hat{L}_+) Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = \hat{L}_z (\hat{L}_z + \hbar \hat{1}) Y_\ell^\ell(\theta, \varphi). \quad (11.67)$$

Au vu de l'équation aux valeurs propres (11.49), évaluée en $m = \ell$,

$$\hat{L}_z Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = \hbar \ell Y_\ell^\ell(\theta, \varphi), \quad (11.68)$$

l'équation aux valeurs propres du carré de l'opérateur moment cinétique (11.67) devient,

$$\hat{L}^2 Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^\ell(\theta, \varphi). \quad (11.69)$$

Compte tenu des relations de commutation (11.42), en appliquant l'opérateur d'échelle \hat{L}_- sur l'équation aux valeurs propres (11.68), elle devient,

$$\hat{L}_- \hat{L}^2 Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = \hat{L}^2 \hat{L}_- Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) \hat{L}_- Y_\ell^\ell(\theta, \varphi). \quad (11.70)$$

Au vu de l'opérateur d'échelle (11.55), l'équation aux valeurs propres divisée par la constante de normalisation $C_\ell^{m-1} = C_\ell^{\ell-1}$ s'écrit,

$$\hat{L}^2 Y_\ell^{\ell-1}(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^{\ell-1}(\theta, \varphi). \quad (11.71)$$

En comparant les équations aux valeurs propres (11.69) et (11.71), la valeur propre de l'opérateur moment cinétique au carré \hat{L}^2 quelle que soit la valeur de nombre quantique magnétique m . Ainsi, ces équations aux valeurs propres sont remises en forme comme,

$$\hat{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (11.72)$$

Par comparaison entre les équations aux valeurs propres (11.48) et (11.72), on en conclut que la valeur propre est,

$$\lambda(\ell) = \ell(\ell+1). \quad (11.73)$$

11.7 Equation de Legendre généralisée

Compte tenu de l'opérateur moment cinétique au carré (11.15), l'équation aux valeurs propres (11.72) divisée par \hbar^2 devient,

$$-\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (11.74)$$

A l'aide de la séparation des harmoniques sphériques en fonctions nodale et azimutale,

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \Theta_\ell^m(\theta) \Phi_\ell^m(\varphi), \quad (11.75)$$

l'équation aux valeurs propres (11.74) divisée par $\Theta_\ell^m(\theta) \Phi_\ell^m(\varphi) / \sin^2\theta$ s'écrit,

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_\ell^m(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \Theta_\ell^m(\theta) + \ell(\ell+1) \sin\theta = - \frac{1}{\Phi_\ell^m(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Phi_\ell^m(\varphi). \quad (11.76)$$

Les fonctions angulaires $\Theta_\ell^m(\theta)$ et $\Phi_\ell^m(\varphi)$ sont des fonctions de variables indépendantes. Par conséquent, ces fonctions satisfont chacune une équation différentielle ordinaire séparée,

$$\frac{1}{\Phi_\ell^m(\varphi)} \frac{d^2 \Phi_\ell^m(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 = \text{cste}, \quad (11.77)$$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_\ell^m(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \Theta_\ell^m(\theta) + \ell(\ell+1) \sin^2\theta = m^2 = \text{cste}, \quad (11.78)$$

où le signe devant m^2 a été choisi afin que la partie azimutale soit continue et ait une périodicité de 2π . La solution de l'équation différentielle ordinaire (11.77) est,

$$\Phi_\ell^m(\varphi) = \Phi_\ell^m(0) e^{im\varphi} = c_\ell^m e^{im\varphi}, \quad (11.79)$$

où $c_\ell^m = \Phi_\ell^m(0)$ sont des constantes de normalisation. L'équation différentielle pour la partie nodale (11.78) multipliée par la fonction nodale $\Theta_\ell^m(\theta)$ et divisée par $\sin\theta$ s'écrit,

$$-\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta_\ell^m(\theta) = \ell(\ell+1) \Theta_\ell^m(\theta). \quad (11.80)$$

Afin de montrer que l'équation différentielle nodale (11.80) est une équation de Legendre généralisée, on définit la variable sans dimension,

$$x = \cos\theta, \quad (11.81)$$



Adrien-Marie
Legendre

et on introduit les polynômes de Legendre généralisés,

$$P_\ell^m(x) = P_\ell^m(\cos\theta) = \Theta_\ell^m(\theta), \quad (11.82)$$

qui satisfont l'équation différentielle nodale,

$$-\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) P_\ell^m(\cos\theta) = \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos\theta). \quad (11.83)$$

Compte tenu des définitions (11.81) et (11.82), et à l'aide des opérateurs différentiels,

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx} \quad \text{et} \quad \sin^2\theta = 1 - x^2, \quad (11.84)$$

l'équation différentielle nodale (11.83) multipliée devient l'équation de Legendre généralisée sous la forme de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_\ell^m(x)}{dx} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_\ell^m(x) = 0. \quad (11.85)$$

Compte tenu des fonctions azimutale (11.79) et nodale (11.82), les harmoniques sphériques (11.75) deviennent,

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = c_\ell^m P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (11.86)$$

11.8 Harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ satisfont la relation d'orthonormalité,

$$\langle Y_{\ell'}^{m'} | Y_\ell^m \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi)^* Y_\ell^m(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}, \quad (11.87)$$

où $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ est la différentielle de l'angle solide d'une sphère. La relation d'orthonormalité (11.87) des harmoniques sphériques (11.86) devient,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} c_{\ell'}^{m'} P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta) c_\ell^m P_\ell^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}, \quad (11.88)$$

qui se réduit à une intégrale simple,

$$2\pi c_{\ell'}^{m'} c_\ell^m \int_0^\pi P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta) P_\ell^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}. \quad (11.89)$$

La relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre généralisés,

$$\langle P_{\ell'}^{m'} | P_\ell^m \rangle = \int_{-1}^1 P_{\ell'}^{m'}(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}, \quad (11.90)$$

peut être écrite en termes de l'angle θ grâce au changement de variable (11.81),

$$-\int_{-\pi}^0 P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta) P_\ell^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}. \quad (11.91)$$

En changeant le signe de la variable d'intégration,

$$\theta \rightarrow -\theta \quad \text{ainsi} \quad \cos\theta \rightarrow \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin\theta d\theta \rightarrow \sin\theta d\theta, \quad (11.92)$$

et en inversant les bornes la relation d'orthogonalité (11.91) devient,

$$\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \int_0^\pi P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta) P_\ell^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}. \quad (11.93)$$

En comparant les relations d'orthogonalité (11.89) et (11.93) on en conclut que,

$$2\pi c_{\ell'}^m c_\ell^m = \frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}. \quad (11.94)$$

Par conséquent, les coefficients de normalisation sont,

$$c_\ell^m = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}, \quad (11.95)$$

		Nombre magnétique (m)						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
Nombre orbital (ℓ)	0							
	1							
	2							
	3							

FIGURE 11.2 Partie réelle des harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ où les volumes en bleu sont positifs et les volumes en rouge sont négatifs.

où $(-1)^m$ est appelé le facteur de phase de Condon et Shortley. Les harmoniques sphériques normalisées s'écrivent comme (Fig. 11.2),

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (11.96)$$

11.9 Equation différentielle radiale

La fonction radiale $R(r) \equiv R_{n\ell}(r)$ dépend du nombre quantique azimutal ℓ mais également d'un autre nombre quantique : le nombre quantique principal $n \in \mathbb{N}^*$ qui quantifie l'énergie $E \equiv E_n$, comme on va le montrer dans cette section. A l'aide de l'équations aux valeurs propres pour l'opérateur moment cinétique au carré (11.72), l'équation de Schrödinger stationnaire (11.30) devient,

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R_{n\ell}(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \\ & - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = E_n R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (11.97)$$

En divisant l'équation de Schrödinger stationnaire (11.97) par les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$, on obtient l'équation aux valeurs propres pour la fonction propre radiale $R_{n\ell}(r)$,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R_{n\ell}(r) = E_n R_{n\ell}(r). \quad (11.98)$$

Comme l'électron dans un atome d'hydrogène est dans un état lié son niveau d'énergie est négatif, c'est-à-dire $E_n > 0$. Ainsi, en introduisant les nombres d'onde k_n définis comme,

$$k_n^2 = -\frac{8m_e E_n}{\hbar^2}, \quad (11.99)$$

L'équation aux valeurs propres radiale (11.98) devient,

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{k_n^2}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 r} \right) R_{n\ell}(r) = 0. \quad (11.100)$$

Afin de remettre en forme l'équation aux valeurs propres radiale (11.100), on définit la variable sans dimension,

$$\rho = k_n r, \quad (11.101)$$



Edward Condon

et on introduit la fonction radiale,

$$\chi_{n\ell}(\rho) = R_{n\ell}(r), \quad (11.102)$$

qui satisfait l'équation différentielle radiale,

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{k_n^2}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 r} \right) \chi_{n\ell}(\rho) = 0. \quad (11.103)$$

Compte tenu des définitions (11.101) et (11.102), et à l'aide des opérateurs différentiels,

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\rho}{dr} \frac{d}{d\rho} = k_n \frac{d}{d\rho}, \quad (11.104)$$

l'équation différentielle radiale (11.103) devient,

$$\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 k_n \rho} \right) \chi_{n\ell}(\rho) = 0. \quad (11.105)$$

Compte tenu des relations différentielles,

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d\chi_{n\ell}(\rho)}{d\rho} \right) = \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \chi_{n\ell}(\rho) + \frac{d^2}{d\rho^2} \chi_{n\ell}(\rho), \quad (11.106)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho \chi_{n\ell}(\rho) \right) &= \frac{d}{d\rho} \left(\chi_{n\ell}(\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} \chi_{n\ell}(\rho) \right) \\ &= 2 \frac{d}{d\rho} \chi_{n\ell}(\rho) + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \chi_{n\ell}(\rho), \end{aligned} \quad (11.107)$$

on en déduit l'identité différentielle,

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d\chi_{n\ell}(\rho)}{d\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho \chi_{n\ell}(\rho) \right). \quad (11.108)$$

A l'aide de l'identité différentielle (11.108), l'équation différentielle radiale (11.105) multipliée par ρ devient,

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 k_n \rho} \right) \left(\rho \chi_{n\ell}(\rho) \right) = 0. \quad (11.109)$$

Compte tenu des nombres d'onde (11.99), le nombre principal n est un nombre entier positif sans dimension,

$$n = \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 k_n} = \sqrt{-\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 E_n}} = \sqrt{-\frac{E_I}{E_n}}, \quad (11.110)$$

où E_I est l'énergie d'ionisation qui correspond à l'énergie à fournir à l'électron s'il est sur le premier niveau d'énergie E_1 pour qu'il puisse se libérer de l'attraction électrostatique générée par le proton,

$$E_I = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} > 0. \quad (11.111)$$

Les niveaux d'énergie négatifs sont alors liés à l'énergie d'ionisation par la relation suivante,

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2} < 0. \quad (11.112)$$

Ces niveaux d'énergie E_n sont les mêmes que ceux qui ont été obtenus par Niels Bohr pour son modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène. A présent, l'équation différentielle radiale (11.109) peut être exprimée en terme du nombre quantique principal (11.110) comme,

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{n}{\rho} \right) \left(\rho \chi_{n\ell}(\rho) \right) = 0. \quad (11.113)$$

11.10 Equation de Laguerre généralisée

L'équation de Laguerre généralisée s'écrit en termes de la variable radiale sans dimension ρ ,

$$\rho \frac{d^2 L_m^k(\rho)}{d\rho^2} + (k+1-\rho) \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + m L_m^k(\rho) = 0, \quad (11.114)$$

où $L_m^k(\rho)$ sont les polynômes de Laguerre généralisés. La relation d'orthogonalité des polynômes de Laguerre généralisés s'écrit,

$$\langle L_{m'}^{k'} | L_m^k \rangle = \int_0^\infty L_{m'}^{k'}(\rho) L_m^k(\rho) \rho^k e^{-\rho} d\rho = \frac{(m+k)!}{m!} \delta_{m'm} \delta_{k'k}, \quad (11.115)$$

où la fonction poids est $w(\rho) = \rho^k e^{-\rho}$ et le coefficient du terme de deuxième ordre est $p_2(\rho) = \rho$. Afin de montrer que l'équation différentielle radiale (11.113) est une équation de Laguerre généralisée, on définit la fonction de Laguerre généralisée,

$$\Psi_m^k(\rho) = \sqrt{w(\rho) p_2(\rho)} L_m^k(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2} L_m^k(\rho). \quad (11.116)$$

A présent, on va montrer que l'équation différentielle,

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} + \frac{2m+k+1}{2\rho} - \frac{k^2-1}{4\rho^2} \right) \Psi_m^k(\rho) = 0, \quad (11.117)$$

est équivalente à l'équation de Laguerre généralisée (11.114). Pour ce faire, on détermine d'abord la dérivée première de la fonction de Laguerre généralisée $\Psi_m^k(\rho)$,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_m^k(\rho)}{d\rho} &= -\frac{1}{2} e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2} L_m^k(\rho) + \frac{k+1}{2\rho} e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2} L_m^k(\rho) \\ &\quad + e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2} \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} \\ &= \left(\frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + \frac{k+1-\rho}{2\rho} L_m^k(\rho) \right) e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2}. \end{aligned} \quad (11.118)$$

La dérivée seconde de la fonction de Laguerre généralisée $\Psi_m^k(\rho)$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_m^k(\rho)}{d\rho^2} &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + \frac{k+1-\rho}{2\rho} L_m^k(\rho) \right) e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2} \\ &\quad + \left(\frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + \frac{k+1-\rho}{2\rho} L_m^k(\rho) \right) \frac{d}{d\rho} \left(e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2} \right). \end{aligned} \quad (11.119)$$

La première dérivée (11.119) s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + \frac{k+1-\rho}{2\rho} L_m^k(\rho) \right) &= \\ = \frac{d^2 L_m^k(\rho)}{d\rho^2} + \frac{k+1-\rho}{2\rho} \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} - \frac{k+1}{2\rho^2} L_m^k(\rho), \end{aligned} \quad (11.120)$$

et la deuxième dérivée (11.119) s'écrit,

$$\frac{d}{d\rho} \left(e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2} \right) = \frac{k+1-\rho}{2\rho} e^{-\rho/2} \rho^{(k+1)/2}. \quad (11.121)$$

Compte tenu des dérivées (11.120) et (11.121), la dérivée seconde de la fonction de Laguerre généralisée multipliée par $e^{\rho/2} \rho^{-(k+1)/2}$ s'écrit,

$$\begin{aligned} e^{\rho/2} \rho^{-(k+1)/2} \frac{d^2\Psi_m^k(\rho)}{d\rho^2} &= \\ = \frac{d^2 L_m^k(\rho)}{d\rho^2} + \frac{k+1-\rho}{2\rho} \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} - \frac{k+1}{2\rho^2} L_m^k(\rho) \\ &\quad + \frac{k+1-\rho}{2\rho} \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + \frac{(k+1-\rho)^2}{4\rho^2} L_m^k(\rho) \\ = \frac{d^2 L_m^k(\rho)}{d\rho^2} + \frac{k+1-\rho}{\rho} \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1}{4} - \frac{k+1}{2\rho} + \frac{k^2-1}{4\rho^2} \right) L_m^k(\rho) \end{aligned} \quad (11.122)$$



Edmond Laguerre

En inversant la définition de la fonction de Laguerre, on obtient,

$$e^{\rho/2} \rho^{-(k+1)/2} \Psi_m^k(\rho) = L_m^k(\rho). \quad (11.123)$$

L'équation différentielle exprimée en termes de la fonction de Laguerre $\Psi_m^k(\rho)$ multipliée par $e^{\rho/2} \rho^{-(k+1)/2}$ s'écrit,

$$e^{\rho/2} \rho^{-(k+1)/2} \frac{d^2 \Psi_m^k(\rho)}{d\rho^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k+1}{2\rho} - \frac{k^2-1}{4\rho^2} + \frac{m}{\rho} \right) e^{\rho/2} \rho^{-(k+1)/2} \Psi_m^k(\rho) = 0. \quad (11.124)$$

En substituant les relations (11.122) et (11.123) dans l'équation différentielle (11.124), elle se réduit à,

$$\frac{d^2 L_m^k(\rho)}{d\rho^2} + \frac{k+1-\rho}{\rho} \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + \frac{m}{\rho} L_m^k(\rho) = 0. \quad (11.125)$$

En multipliant l'équation différentielle (11.125), on retrouve l'équation différentielle de Laguerre généralisée,

$$\rho \frac{d^2 L_m^k(\rho)}{d\rho^2} + (k+1-\rho) \frac{dL_m^k(\rho)}{d\rho} + m L_m^k(\rho) = 0, \quad (11.126)$$

ce qui achève la preuve. L'équation de Laguerre généralisée (11.117) est équivalente à l'équation différentielle radiale (11.113) compte tenu de l'identification des coefficients,

$$k = 2\ell + 1 \quad \text{et} \quad m = n - \ell - 1 \geq 0. \quad (11.127)$$

Ainsi, le nombre quantique principal n est toujours supérieur au nombre quantique azimutal ℓ ,

$$n \geq \ell + 1, \quad (11.128)$$

ce qui justifie le choix de l'intervalle pour l'indice de sommation ℓ dans l'équation (11.29). Etant donné que les équations différentielles (11.117) et (11.113) sont équivalentes, la fonction radiale $\rho \chi_{n\ell}(\rho)$ est un multiple de la fonction de Laguerre généralisée $\Psi_m^k(\rho) = \Psi_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho)$,

$$\chi_{n\ell}(\rho) = \frac{c_{n\ell} \Psi_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho)}{\rho} = c_{n\ell} e^{-\rho/2} \rho^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho), \quad (11.129)$$

où les coefficients $c_{n\ell}$ sont des constantes de normalisation. Compte tenu du nombre principal (11.110), le rayon de Bohr s'écrit,

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{2}{n k_n}. \quad (11.130)$$

Ainsi, la variable radiale sans dimension (11.101) est exprimée en termes du rayon de Bohr (11.130) comme,

$$\rho = \frac{2r}{na_0}. \quad (11.131)$$

Compte tenu des définitions des fonctions radiales (11.102) et de la variable sans dimension (11.131), l'expression de la fonction radiale (11.129) devient,

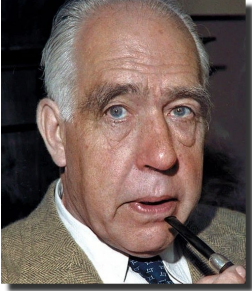
$$R_{n\ell}(r) = c_{n\ell} e^{-r/(na_0)} \left(\frac{2r}{na_0} \right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right). \quad (11.132)$$

Les constantes de normalisation $c_{n\ell}$,

$$c_{n\ell} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}, \quad (11.133)$$

sont choisies afin que les fonctions radiales $R_{n,\ell}(r)$ satisfassent la relation d'orthonormalité,

$$\int_0^\infty R_{n'\ell'}(r) R_{n\ell}(r) r^2 dr = \delta_{n'n} \delta_{\ell'\ell}, \quad (11.134)$$



Niels Bohr

où $r^2 dr$ est la partie radiale du volume infinitésimal en coordonnées sphériques. Ainsi, les fonctions radiales (11.132) s'écrivent explicitement,

$$R_{n\ell}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}} e^{-r/(na_0)} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right). \quad (11.135)$$

Les fonctions radiales $R_{n0}(r)$ pour les orbitales de type "s" sont définies par le nombre azimutal $\ell = 0$ (Fig. 11.3). Les fonctions radiales $R_{n1}(r)$ pour les orbitales de type "p" sont définies par le nombre azimutal $\ell = 1$ (Fig. 11.4). Les fonctions radiales $R_{n2}(r)$ pour les orbitales de type "d" sont définies par le nombre azimutal $\ell = 2$ (Fig. 11.4).

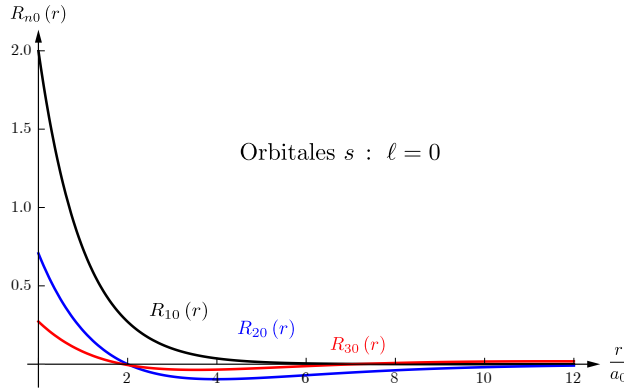


FIGURE 11.3 Fonctions radiales $R_{n0}(r)$ pour les orbitales de type "s" des niveaux d'énergies $n = 1, 2, 3$: $R_{10}(r)$, $R_{20}(r)$ et $R_{30}(r)$.

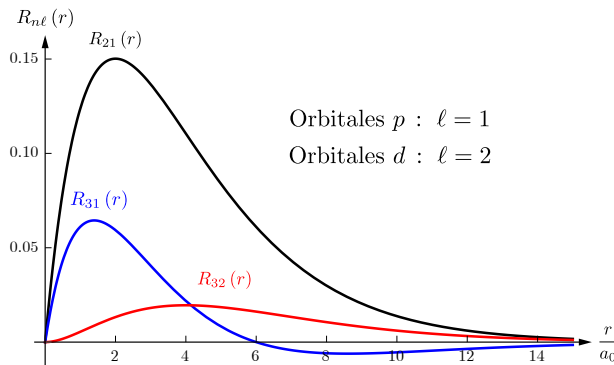


FIGURE 11.4 Fonctions radiales $R_{n1}(r)$ pour les orbitales de type "p" des niveaux d'énergies $n = 2, 3$: $R_{21}(r)$ et $R_{31}(r)$, et fonction radiale $R_{23}(r)$ pour les orbitales de type "d".

11.11 Ensemble complet d'observables compatibles

Un ensemble d'observables compatibles, ou qui commutent, souvent abrégé ECOC, est un ensemble d'observables qui satisfont deux conditions :

1. Les observables commutent toutes entre elles : leurs commutateurs sont nuls.
2. Leurs espaces propres sont égaux : il existe une base orthonormée unique de vecteurs propres communs à l'ensemble des observables.

Etant donné que les observables d'un ECOC commutent, elles sont compatibles. On peut ainsi les mesurer simultanément, contrairement à la position et la quantité de mouvement. Les vecteurs d'état faisant partie de la base de l'ECOC sont entièrement caractérisés par les valeurs propres des opérateurs qui sont les observables de l'ECOC. Dans le cas de l'atome

d'hydrogène, l'hamiltonien \hat{H} , l'opérateur moment cinétique au carré \hat{L}^2 et la composante vertical du moment cinétique \hat{L}_z de l'électron forment un ECOOC si on ignore le spin de l'électron.

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0. \quad (11.136)$$

Les vecteurs $|n, \ell, m\rangle \equiv |\psi_{n\ell m}\rangle$ de la base orthonormée de l'espace de Hilbert \mathcal{H} associé à cet ECOOC sont les fonctions d'onde $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)$,

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (11.137)$$

indicées par le nombre quantique principal n qui définit le niveau d'énergie, le nombre azimutal ℓ qui caractérise l'amplitude de rotation et le nombre magnétique m qui correspond à la projection du moment cinétique sur l'axe de rotation. Les fonctions d'onde $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)$ satisfont la relation d'orthonormalité,

$$\langle \psi_{n'\ell'm'} | \psi_{n\ell m} \rangle = \delta_{n'n} \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}, \quad (11.138)$$

qui est explicitée comme,

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi_{n'\ell'm'}(r, \theta, \varphi)^* \psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{n'n} \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}, \quad (11.139)$$

où $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ est le volume infinitésimal en coordonnées sphériques. Compte tenu des fonctions radiales (11.135) et des harmoniques sphériques (11.96), les fonctions d'onde normalisées s'écrivent,

$$\begin{aligned} \psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = & (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(n-\ell-1)! (\ell-m)!}{2n(n+\ell)! (\ell+m)!}} \left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \\ & \cdot e^{-r/(na_0)} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (11.140)$$

où compte tenu des relations (11.63) et (11.128), les nombres quantiques principal $n \in \mathbb{N}^*$, azimutal $\ell \in \mathbb{N}$ et magnétique $m \in \mathbb{Z}$ satisfont les conditions suivantes,

$$\ell \leq n-1 \quad \text{et} \quad -m \leq \ell \leq m. \quad (11.141)$$

Les fonctions d'onde $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)$ sont illustrées pour des nombres quantiques n, ℓ et m fixés pour les orbitales "s", "p" et "d" des niveaux d'énergie $n = 1, 2, 3$. Les parties en bleu sont réelles et positives, les parties en rouge sont réelles et négatives et les parties dans d'autres couleurs sont complexes (Fig. 11.5).

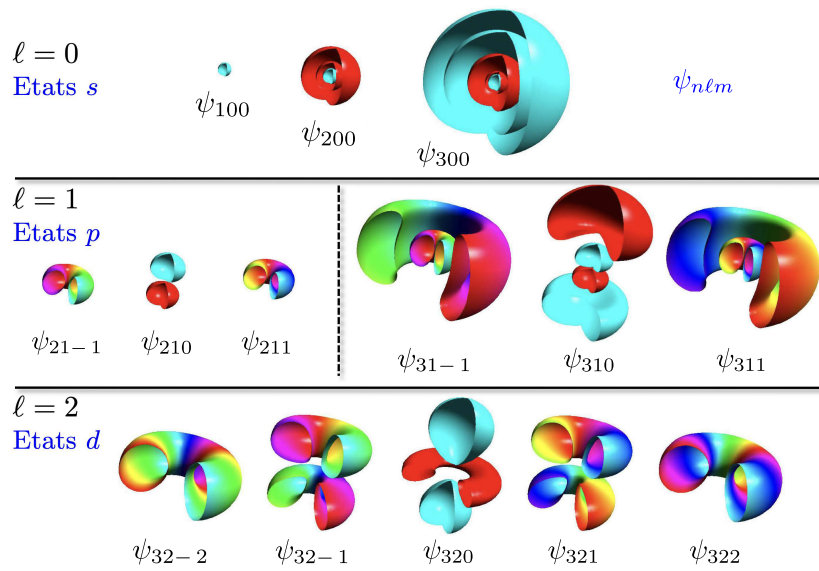


FIGURE 11.5 Fonctions d'onde $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ pour les orbitales "s" ($\ell = 0$), "p" ($\ell = 1$) et "d" ($\ell = 2$) des niveaux d'énergie $n = 1, 2, 3$.

12.1 Introduction

Les équations de Maxwell constituent la pierre angulaire de l'électrodynamique qui a donné lieu d'abord à la relativité restreinte aux référentiels d'inertie et a ensuite été généralisée aux référentiels accélérés. Ces équations sont généralement présentées sous la forme d'un ensemble de quatre équations vectorielles. Cependant, cette formulation n'est pas le fruit du travail original de Maxwell. C'est en réalité Oliver Heaviside qui a reformulé les équations de Maxwell en quatre équations vectorielles, en utilisant le calcul vectoriel qu'il a co-développé avec Josiah Willard Gibbs. Dans son article initial, Maxwell avait présenté 20 équations sous forme de composantes. Par la suite, dans son ouvrage "Treatise on Electricity and Magnetism", il a reformulé cet ensemble d'équations en utilisant les quaternions, découverts par William Rowan Hamilton.

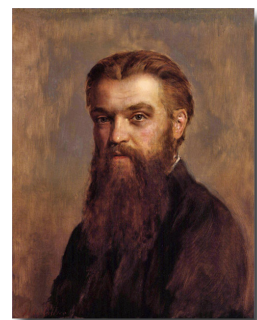
Bien que le cadre vectoriel développé par Heaviside et Gibbs soit particulièrement adapté à la description des translations — ce qui explique son adoption historique en physique — l'algèbre des quaternions \mathbb{H} est quant à elle bien mieux adaptée à la description des rotations. À l'inverse, dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , il est nécessaire d'introduire des pseudovecteurs pour traiter correctement les rotations. Cela soulève naturellement la question suivante : Avons-nous réellement besoin de choisir entre ces deux cadres, ou est-il possible de tirer parti des deux en même temps ? La bonne nouvelle, c'est que ces deux approches — vectorielle et quaternionique — s'inscrivent en réalité dans un cadre mathématique plus général, appelé de nos jours algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , ou historiquement algèbre de Clifford $Cl_3(\mathbb{R})$. Ce cadre unificateur a été introduit par William Kingdon Clifford dans un article intitulé "Applications of Grassmann's Extensive Algebra".

En algèbre géométrique \mathbb{G}^3 de l'espace à trois dimensions, il existe quatre types d'entités géométriques. Premièrement, les entités géométriques de dimension 0, appelées scalaires, sont des points orientés définis par leur grandeur et leur orientation (par exemple, positive ou négative). Deuxièmement, les entités géométriques de dimension 1 sont appelées vecteurs ; ce sont des lignes orientées, définies par leur grandeur et leur orientation. Troisièmement, les entités géométriques de dimension 2, appelées bivecteurs, sont des surfaces orientées définies par leur grandeur et leur orientation. Quatrièmement, les entités géométriques de dimension 3, appelées trivecteurs ou pseudoscalaires, représentent des volumes orientés définis par leur grandeur et leur orientation (par exemple, positive ou négative). L'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 est un espace vectoriel constitué de multivecteurs, c'est-à-dire de combinaisons linéaires de scalaires, vecteurs, bivecteurs et pseudoscalaires. L'algèbre des quaternions \mathbb{H} , qui est constituée de combinaisons linéaires de scalaires et de bivecteurs, correspond à la sous-algèbre paire de l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 . L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , formé de combinaisons linéaires de vecteurs, est un sous-espace de l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 . L'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 est un espace vectoriel muni d'une loi de composition intérieure : le produit géométrique entre deux multivecteurs.

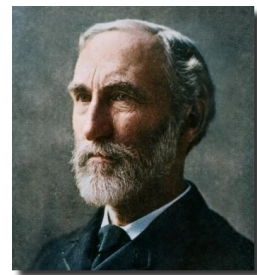
La structure algébrique de l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 se base sur le produit géométrique de deux multivecteurs qui est la somme algébrique des produits intérieur et extérieur de ces multivecteurs comme détaillé en sect. 12.2. Ces produits sont explicités en sect. 12.3. Le produit intérieur de deux vecteurs donne un scalaire : c'est leur produit scalaire. Le produit extérieur de deux vecteurs donne un bivecteur : c'est le dual du produit vectoriel comme



William Rowan
Hamilton



William Kingdon
Clifford



Josiah Willard Gibbs

montré en sect. 12.6. La dualité en algèbre géométrique, définie en sect. 12.5, est équivalente à la dualité de Hodge en formes différentielles. Elle est illustrée en sect. 12.6 par les règles de la main droite et de la main gauche en fonction de son sens. Les modules et les inverses des entités géométriques sont définies en sect. 12.4. La réflexion d'un vecteur par rapport à un plan peut simplement être décrite par deux produits géométriques de ce vecteur avec le vecteur unitaire orthogonal au plan comme montrée en sect. (12.8) De plus, toute rotation peut être écrite comme la composition de deux réflexions selon des plans non parallèle dont l'intersection correspond à l'axe de rotation. Par conséquent, les rotations peuvent être décrites en algèbre géométrique \mathbb{C}^3 à l'aide de rotors R qui sont des combinaisons linéaires d'un scalaire et d'un bivecteur et sont isomorphes aux nombres complexes. Cette structure est particulièrement élégante! Finalement, la cinématique d'un repère mobile en rotation peut être entièrement caractérisée par l'évolution temporelle du rotor $R(t)$.

12.2 Structure algébrique

Le produit central en algèbre géométrique \mathbb{C}^3 est le produit géométrique qui est la somme du produit intérieur et du produit extérieur. Le produit géométrique de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} s'écrit,

$$\mathbf{u} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad (12.1)$$

où le produit intérieur $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ est le produit scalaire et le produit extérieur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est le dual du produit vectoriel $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Le produit intérieur des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est symétrique et le résultat de ce produit est un scalaire,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbf{u}). \quad (12.2)$$

Le produit extérieur des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est antisymétrique et le résultat de ce produit est un bivecteur, soit un élément de plan orienté,

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{u}). \quad (12.3)$$

Le produit extérieur \wedge est associatif contrairement au produit vectoriel \times . Le produit géométrique des vecteurs de base d'une base orthonormée $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ de \mathbb{R}^3 s'écrit,

$$\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j + \hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (12.4)$$

Les vecteurs de cette base sont orthonormaux,

$$\hat{\mathbf{e}}_i^2 = \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = 1 \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0}. \quad (12.5)$$

Ainsi, le carré du produit géométrique du carré de deux vecteurs de base orthogonaux, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = 0$ où $i \neq j$, s'écrit,

$$(\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j)^2 = \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j = -\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_j = -1. \quad (12.6)$$

Ainsi, si $i \neq j$, le produit géométrique $\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$ se réduit au produit extérieur de ces vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_j$. Ce produit est un bivecteur unité qui représente géométriquement un élément de plan orienté de module unité. Compte tenu de la relation (12.7), les trois bivecteurs $\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3$ et $\hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1$ sont isomorphes à des nombres imaginaires différents. L'élément de volume orienté obtenu en prenant le produit extérieur des trois vecteurs de base $\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3$ est un trivecteur unité qui représente géométriquement un élément de volume orienté de module unité. En trois dimensions, ce trivecteur est appelé le pseudoscalaire I . Il est isomorphe à un nombre imaginaire. En effet,

$$\begin{aligned} I^2 &= (\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3)^2 = (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3)^2 \\ &= \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = -1. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Ce résultat a été établi en permutant deux vecteurs voisins différents et en changeant le signes de leur produit géométrique. Tout scalaire s est un multiple de l'unité 1. Tout vecteur

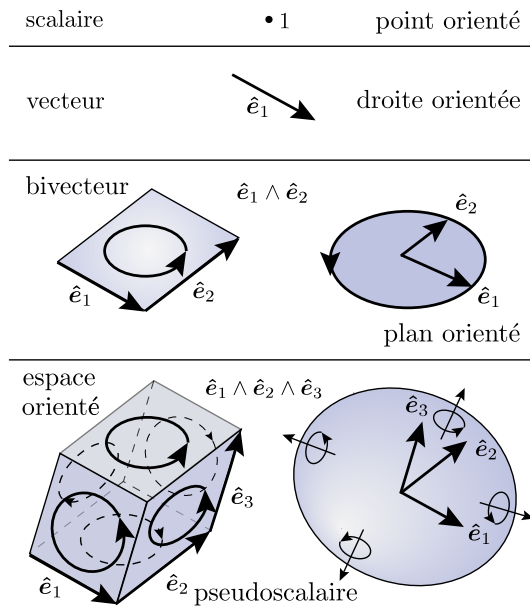


FIGURE 12.1 Algèbre géométrique \mathbb{G}^3 constituée de scalaires, de vecteurs, de bivecteurs et d'un pseudoscalaire.

\mathbf{v} est une combinaison linéaire des trois vecteurs de base \hat{e}_1 , \hat{e}_2 et \hat{e}_3 ,

$$\mathbf{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3. \quad (12.8)$$

Tout bivecteur \mathbf{B} est une combinaison linéaire des trois bivecteurs de base $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$, $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ et $\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1$,

$$\mathbf{B} = B_{12} \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + B_{23} \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 + B_{31} \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1. \quad (12.9)$$

Tout trivecteur \mathbf{T} est un multiple du pseudoscalaire $I = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$,

$$\mathbf{T} = T_{123} \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3. \quad (12.10)$$

L'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 a 8 dimensions, car elle est engendrée par huit entités géométriques linéairement indépendantes (Fig. 12.1) :

- un scalaire 1 représentant un point orienté (dimension 0).
- trois vecteurs \hat{e}_1 , \hat{e}_2 , \hat{e}_3 représentant des droites orientées (dimension 1).
- trois bivecteurs $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$, $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ et $\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1$ représentant des plans orientés (dimension 2).
- un trivecteur $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ représentant des volumes orientés (dimension 3).

Le produit extérieur $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ somme la dimension des vecteurs \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_j puisque le résultat est un bivecteur de dimension 2. Le produit intérieur $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ prend la différence des dimensions des vecteurs \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_j puisque le résultat est un scalaire est de dimension 0. L'élément de base de l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 est un multivecteur M qui est une combinaison linéaire de scalaires, vecteurs, bivecteurs et pseudoscalaires,

$$M = s + \mathbf{v} + \mathbf{B} + T. \quad (12.11)$$

Les multivecteurs $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{G}^3$ satisfont la loi de composition interne $\mathbb{G}^3 \times \mathbb{G}^3 \rightarrow \mathbb{G}^3$ qui est le produit géométrique,

$$(M_1 + M_2)(M_3 + M_4) = M_1 M_3 + M_1 M_4 + M_2 M_3 + M_2 M_4. \quad (12.12)$$

12.3 Produits géométriques d'entités algébriques

Les produits de vecteurs ont été définis en sect. 12.2. Dans cette section, on va déterminer d'autres produits. Le produit géométrique du vecteur \mathbf{v} et du bivecteur \mathbf{B} est la somme du

produit intérieur et du produit extérieur,

$$\mathbf{v} \mathbf{B} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}, \quad (12.13)$$

et le produit géométrique du bivecteur \mathbf{B} et du vecteur \mathbf{v} est la somme du produit intérieur et du produit extérieur,

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}. \quad (12.14)$$

Sans perte de généralité, on choisit d'orienter les vecteurs de base de manière à ce que le bivecteur \mathbf{B} se trouve dans le plan engendré par les vecteurs de base $\hat{\mathbf{e}}_1$ et $\hat{\mathbf{e}}_2$, c'est-à-dire $\mathbf{B} = B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2$, et que le vecteur $\mathbf{v} = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ ait une orientation arbitraire. Le produit géométrique du vecteur \mathbf{v} et du bivecteur \mathbf{B} s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \mathbf{B} &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) \\ &= v_1 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_2 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &= v_1 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 - v_2 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 + v_3 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3, \end{aligned} \quad (12.15)$$

et le produit géométrique du bivecteur \mathbf{B} et du vecteur \mathbf{v} est de la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{v} &= (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= B_{12} v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_1 + B_{12} v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + B_{12} v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= -B_{12} v_1 \hat{\mathbf{e}}_2 + B_{12} v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 + B_{12} v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Le produit extérieur du vecteur \mathbf{v} et du bivecteur \mathbf{B} s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \wedge (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2) \\ &= v_1 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 + v_2 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &= v_3 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 = v_3 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3, \end{aligned} \quad (12.17)$$

et le produit extérieur du bivecteur \mathbf{B} et du vecteur \mathbf{v} est de la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \wedge \mathbf{v} &= (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2) \wedge (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= B_{12} v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 + B_{12} v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 + B_{12} v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= B_{12} v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 = B_{12} v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Par conséquent, on comparant les produits géométriques (12.15) et (12.16) et les produits extérieurs (12.17) et (12.18), on en conclut que le produit extérieur entre un vecteur et un bivecteur est la partie symétrique du produit géométrique,

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{v}). \quad (12.19)$$

Compte tenu des relations (12.13), (12.15) et (12.17), on en déduit que,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -v_2 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 + v_1 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (12.20)$$

Au vu des relations (12.14), (12.16) et (12.18), on en déduit que,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{v} - \mathbf{B} \wedge \mathbf{v} = B_{12} v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 - B_{12} v_1 \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (12.21)$$

Par conséquent, compte tenu des produits géométriques (12.15) et (12.16) et des produits extérieurs (12.17) et (12.18), on en conclut que le produit intérieur entre un vecteur et un bivecteur est la partie antisymétrique du produit géométrique,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}). \quad (12.22)$$

Le produit géométrique du vecteur \mathbf{v} et du pseudoscalaire I s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} I &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) (\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2), \end{aligned} \quad (12.23)$$

et le produit géométrique du pseudoscalaire I et du vecteur \mathbf{v} s'écrit,

$$\begin{aligned} I\mathbf{v} &= (\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3) (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) . \end{aligned} \quad (12.24)$$

Ainsi, on en conclut avec le vecteur \mathbf{v} commute avec le pseudoscalaire I ,

$$\mathbf{v}I = I\mathbf{v} . \quad (12.25)$$

Le produit géométrique du bivecteur \mathbf{B} et du pseudoscalaire I s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}I &= (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 + B_{23} \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 + B_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1) (\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + B_{23} \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + B_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= -B_{12} \hat{\mathbf{e}}_3 - B_{23} \hat{\mathbf{e}}_1 - B_{31} \hat{\mathbf{e}}_2 , \end{aligned} \quad (12.26)$$

et le produit géométrique du pseudoscalaire I et du bivecteur \mathbf{B} s'écrit,

$$\begin{aligned} I\mathbf{B} &= (\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3) (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 + B_{23} \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 + B_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1) \\ &= B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 + B_{23} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + B_{31} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &= -B_{12} \hat{\mathbf{e}}_3 - B_{23} \hat{\mathbf{e}}_1 - B_{31} \hat{\mathbf{e}}_2 . \end{aligned} \quad (12.27)$$

Ainsi, on en conclut avec le bivecteur \mathbf{B} commute avec le pseudoscalaire I ,

$$\mathbf{B}I = I\mathbf{B} . \quad (12.28)$$

Un trivecteur T est un multiple du pseudovecteur I ce qui implique que ces entités commutent,

$$TI = IT . \quad (12.29)$$

12.4 Modules et inverses

Le renversement d'un multivecteur, noté avec un exposant \dagger , consiste à renverser l'ordre des vecteurs d'un produit. Ainsi, un scalaire s et un vecteur \mathbf{v} sont invariants par renversement,

$$s^\dagger = s \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^\dagger = \mathbf{v} , \quad (12.30)$$

un bivecteur \mathbf{B} change de signe, dû à une permutation de deux vecteurs, et un trivecteur T change de signe, dû à trois permutations de trois vecteurs,

$$\mathbf{B}^\dagger = -\mathbf{B} \quad \text{et} \quad T^\dagger = -T . \quad (12.31)$$

Le module d'un scalaire s est sa valeur propre, le module d'un vecteur \mathbf{v} est sa longueur, le module d'un bivecteur \mathbf{B} est sa surface et le module du pseudoscalaire I est son volume. Les modules au carré s'écrivent,

$$\begin{aligned} |s|^2 &= s^\dagger s = s^2 > 0 , \\ |\mathbf{v}|^2 &= \mathbf{v}^\dagger \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^2 > 0 , \\ |\mathbf{B}|^2 &= \mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{B}^2 > 0 , \\ |T|^2 &= T^\dagger T = -TT = -T^2 > 0 . \end{aligned} \quad (12.32)$$

Les inverses d'un scalaire s , d'un vecteur \mathbf{v} , d'un bivecteur \mathbf{B} et d'un pseudoscalaire I sont définis comme,

$$\begin{aligned} s^{-1} &= \frac{s}{s^2} = \frac{s}{|s|^2} , \\ \mathbf{v}^{-1} &= \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} , \\ \mathbf{B}^{-1} &= \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} = -\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} , \\ T^{-1} &= \frac{T}{T^2} = -\frac{T}{|T|^2} \quad \text{ainsi} \quad I^{-1} = \frac{I}{I^2} = -I . \end{aligned} \quad (12.33)$$

12.5 Dualité

Dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , la dualité lie des entités géométriques dont la somme des dimensions vaut 3 : un vecteur et un bivecteur ($1 \leftrightarrow 2$) ou un scalaire et un trivecteur ($0 \leftrightarrow 3$). Les duals d'un vecteur \mathbf{v} et d'un bivecteur \mathbf{B} sont définis comme,

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{I} = -\mathbf{v}I \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{I} = -\mathbf{B}I. \quad (12.34)$$

La dualité entre un vecteur \mathbf{v} et un bivecteur \mathbf{B} s'écrit,

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^* = -\mathbf{B}I = -\mathbf{v}^*I = \mathbf{v}I^2 = -\mathbf{v}, \quad (12.35)$$

ce qui implique,

$$(\mathbf{v}^*)^* = -\mathbf{v} \quad \text{et} \quad (\mathbf{B}^*)^* = -\mathbf{B}. \quad (12.36)$$

Les duals d'un scalaire s et d'un trivecteur T sont définis comme,

$$s^* = \frac{s}{I} = -sI \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T}{I} = -TI. \quad (12.37)$$

La dualité entre un scalaire s et un trivecteur T s'écrit,

$$s^* = T \quad \text{et} \quad T^* = -TI = -s^*I = sI^2 = -s, \quad (12.38)$$

ce qui implique,

$$(\mathbf{s}^*)^* = -s \quad \text{et} \quad (T^*)^* = -T. \quad (12.39)$$

Plus généralement, pour tout multivecteur M , le dual du dual est l'opposé du multivecteur,

$$(M^*)^* = -M. \quad (12.40)$$

Sans perte de généralité, on oriente les vecteurs de base du repère $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ et $\hat{\mathbf{e}}_3$ tel que les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} soient dans le plan engendré par les vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_1$ et $\hat{\mathbf{e}}_2$, c'est-à-dire $\mathbf{u} = u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ et $\mathbf{v} = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2$. Le dual du produit intérieur des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} s'écrit,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^* &= -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})I \\ &= -\left((u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2)\right) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= -(u_1 v_1 + u_2 v_2) \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Le produit extérieur du vecteur \mathbf{u} et du bivecteur \mathbf{v}^* s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^* &= -\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v}I) \\ &= -(u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \wedge \left((v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3)\right) \\ &= -(u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \wedge (v_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 - v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= -(u_1 v_1 + u_2 v_2) \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (12.42)$$

En comparant les relations (12.41) et (12.42), on établit l'identité duale,

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^*. \quad (12.43)$$

Le dual du produit extérieur des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} s'écrit,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* &= -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})I \\ &= -\left((u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \wedge (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2)\right) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= -(u_1 v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 + u_2 v_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_1) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{\mathbf{e}}_3, \end{aligned} \quad (12.44)$$



Sir William Vallance
Douglas Hodge

et le produit intérieur du vecteur \mathbf{u} et du bivecteur \mathbf{v}^* est de la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* &= -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} I) \\ &= - (u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot \left((v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \right) \\ &= - (u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (v_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 - v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (12.45)$$

En comparant les relations (12.44) et (12.45), on établit l'identité duale,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^*. \quad (12.46)$$

Sans perte de généralité, on oriente les vecteurs de base du repère $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ et $\hat{\mathbf{e}}_3$ tel que le bivecteur \mathbf{B} se trouve dans le plan engendré par les vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_1$ et $\hat{\mathbf{e}}_2$, c'est-à-dire $\mathbf{B} = B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2$, et que le vecteur $\mathbf{v} = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ ait une orientation arbitraire. Le dual du produit intérieur du vecteur \mathbf{v} et du bivecteur \mathbf{B} s'écrit,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^* &= -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) I \\ &= - \left((v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) \right) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= - (v_1 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 - v_2 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= v_1 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_3 + v_2 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3, \end{aligned} \quad (12.47)$$

et le produit extérieur des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{B}^* est de la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}^* &= -\mathbf{v} \wedge (\mathbf{B} I) \\ &= - (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \wedge \left((B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \right) \\ &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \wedge (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= v_1 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_3 + v_2 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (12.48)$$

En comparant les relations (12.50) et (12.48), on établit l'identité duale,

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^* = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}^*. \quad (12.49)$$

Le dual du produit extérieur du vecteur \mathbf{v} et du bivecteur \mathbf{B} s'écrit,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})^* &= -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) I \\ &= - \left((v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \wedge (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) \right) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= - (v_3 B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= v_3 B_{12}, \end{aligned} \quad (12.50)$$

et le produit intérieur des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{B}^* est de la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^* &= -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} I) \\ &= - (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \left((B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3) \right) \\ &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (B_{12} \hat{\mathbf{e}}_3) = v_3 B_{12}. \end{aligned} \quad (12.51)$$

En comparant les relations (12.50) et (12.51), on établit l'identité duale,

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^*. \quad (12.52)$$

12.6 Produit extérieur et produit vectoriel

On va montrer que le produit vectoriel $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est le dual du produit extérieur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Les modules de ces deux produits sont les mêmes mais géométriquement le produit vectoriel est un pseudovecteur orthogonal au bivecteur obtenu par produit extérieur. L'orientation du pseudovecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ par rapport au bivecteur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est donnée par la règle de la main

droite. A l'aide du produit géométrique (13.2) entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , on obtient l'identité suivante,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 &= \mathbf{u}^2 |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2, \end{aligned} \quad (12.53)$$

ce qui implique que,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (12.54)$$

Par définition, le produit intérieur (ou scalaire) s'écrit,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta, \quad (12.55)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} (Fig. 12.2). Le carré du produit extérieur entre les

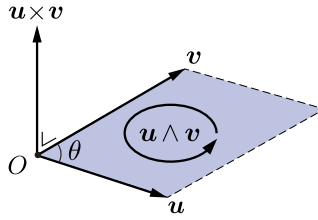


FIGURE 12.2 Dualité entre le bivecteur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ et le vecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

vecteurs (12.54), qui est un bivecteur,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = -|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2, \quad (12.56)$$

devient,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = (\cos^2 \theta - 1) |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 = -|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta = -|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2, \quad (12.57)$$

ce qui implique que,

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta, \quad (12.58)$$

où $\theta \in [0, \pi)$. Par définition, le module du produit vectoriel de deux vecteurs s'écrit,

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta. \quad (12.59)$$

Par conséquent, les modules des produits extérieur et vectoriel sont égaux,

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|. \quad (12.60)$$

Pour établir la dualité entre ces deux produits, on choisit des vecteurs $\mathbf{u} = u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ et $\mathbf{v} = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ non colinéaires. Le dual du produit extérieur entre ces vecteurs (12.44) s'écrit,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (12.61)$$

Le produit vectoriel entre ces vecteurs s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \times (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \\ &= (u_1 v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 + u_2 v_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_1) \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (12.62)$$

En comparant les produits (12.61) et (12.62), on en conclut que le produit vectoriel entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est le dual du produit extérieur.

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \quad (12.63)$$

Le pseudovecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ comme dual du bivecteur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ a une orientation donnée par la règle de la main droite. Compte tenu l'identité (12.36), le dual de l'identité duale (12.63) (Fig. 12.3),

$$((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^*)^* = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^*, \quad (12.64)$$

devient,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^* = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} . \quad (12.65)$$

Le bivecteur $-\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ comme dual du pseudovecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a une orientation donnée par la règle de la main gauche (Fig. 12.3).

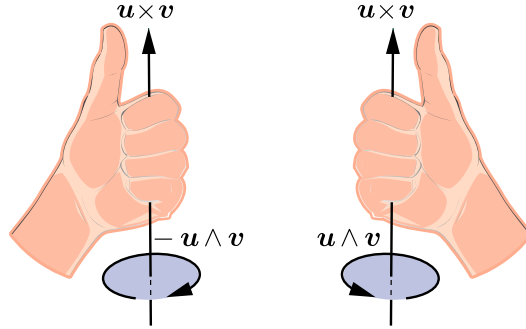


FIGURE 12.3 Le pseudovecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est le dual du bivecteur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ avec une orientation donnée par la règle de la main droite. Le bivecteur $-\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est le dual du pseudovecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ avec une orientation donnée par la règle de la main gauche.

12.7 Réflexions

Une rotation est la composition de deux réflexions successives par rapport à deux plans non parallèles où l'axe de rotation est la droite obtenue par intersection de ces deux plans. Afin de montrer ceci dans le cadre de l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , on examine d'abord les réflexions. On considère un vecteur \mathbf{v} et un vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}$ quelconques. Le produit géométrique (13.2) des vecteurs $\hat{\mathbf{n}}$ et \mathbf{v} s'écrit,

$$\hat{\mathbf{n}} \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v} . \quad (12.66)$$

Etant donné que le vecteur $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unité, le vecteur \mathbf{v} peut être décomposé en une partie parallèle et une partie perpendiculaire à $\hat{\mathbf{n}}$ en utilisant du produit géométrique (12.66),

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}}^2 \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) + \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v}) . \quad (12.67)$$

A l'aide du produit géométrique (12.22) du vecteur $\hat{\mathbf{n}}$ avec le bivecteur $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v}$, la deuxième partie du vecteur \mathbf{v} peut être remise en forme,

$$\hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v} + \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v}) . \quad (12.68)$$

Compte tenu des relations (12.67) et (12.68), le vecteur \mathbf{v} est décomposé en une partie parallèle et une partie perpendiculaire (Fig. 12.4),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} , \quad (12.69)$$

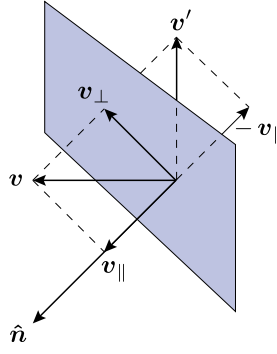
de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel} &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{n}} , \\ \mathbf{v}_{\perp} &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{v}) . \end{aligned} \quad (12.70)$$

La partie parallèle \mathbf{v}_{\parallel} du vecteur \mathbf{v} résulte de la projection sur le vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}$. Compte tenu de la relation (12.70) et du fait que le vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}$ est son propre inverse, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}^{-1}$, la projection du vecteur \mathbf{v} sur le vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}$ est un automorphisme $P_{\hat{\mathbf{n}}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini comme (Fig. 12.4),

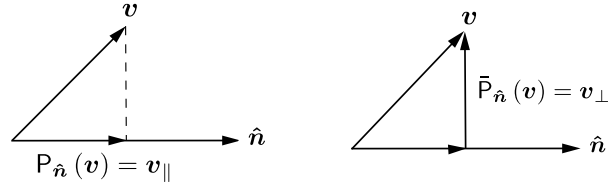
$$P_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{v}) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}^{-1} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) . \quad (12.71)$$

La partie perpendiculaire \mathbf{v}_{\perp} du vecteur \mathbf{v} résulte de la rejection sur le vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}$, qui est une projection sur le complément orthogonal de la droite $P_{\hat{\mathbf{n}}}$ de vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}$. Compte tenu des relations (12.68) and (12.70) et du fait que le vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}$ est son propre inverse,

FIGURE 12.4 Réflexion du vecteur v par rapport au plan orthogonal au vecteur unité \hat{n} .

c'est-à-dire $\hat{n} = \hat{n}^{-1}$, la rejection du vecteur v sur le vecteur \hat{n} est un automorphisme $\bar{P}_{\hat{n}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie comme (Fig. 12.4),

$$\bar{P}_{\hat{n}}(v) = \hat{n} \cdot (\hat{n} \wedge v) = \hat{n} (\hat{n} \wedge v) = \hat{n}^{-1} (\hat{n} \wedge v). \quad (12.72)$$

FIGURE 12.5 Projection $P_{\hat{n}}(v)$ et rejection $\bar{P}_{\hat{n}}(v)$ du vecteur v sur le vecteur unité \hat{n} .

Compte tenu des relations (12.69), (12.71) et (12.72), la complémentarité entre les sous-espaces $P_{\hat{n}}$ et $\bar{P}_{\hat{n}}$ s'écrit,

$$v = P_{\hat{n}}(v) + \bar{P}_{\hat{n}}(v). \quad (12.73)$$

La réflexion d'un vecteur v par rapport au plan orthogonal au vecteur unité \hat{n} donne le vecteur v' de manière suivante (Fig. 12.4),

$$v' = -P_{\hat{n}}(v) + \bar{P}_{\hat{n}}(v) = -v_{\parallel} + v_{\perp}, \quad (12.74)$$

où la projection $P_{\hat{n}}(v)$ change de signe et la rejection $\bar{P}_{\hat{n}}(v)$ reste inchangée. A l'aide des parties parallèle et perpendiculaire (12.70) du vecteur v et de l'antisymétrie (12.22) du produit intérieur du vecteur \hat{n} et du bivecteur $\hat{n} \wedge v$, la réflexion du vecteur (12.74) est remis en forme comme,

$$v' = -(\hat{n} \cdot v) \hat{n} + \hat{n} \cdot (\hat{n} \wedge v) = -(\hat{n} \cdot v) \hat{n} - (\hat{n} \wedge v) \cdot \hat{n}. \quad (12.75)$$

A l'aide du produit géométrique (12.21) du bivecteur $\hat{n} \wedge v$ et du vecteur \hat{n} , la deuxième partie du vecteur v' est remise en forme comme,

$$(\hat{n} \wedge v) \cdot \hat{n} = (\hat{n} \wedge v) \hat{n} - \hat{n} \wedge v \wedge \hat{n} = (\hat{n} \wedge v) \hat{n}. \quad (12.76)$$

Compte tenu du produit géométrique (12.66) et de l'identité (12.76), la réflexion du vecteur (12.75) est remis en forme comme,

$$v' = -(\hat{n} \cdot v + \hat{n} \wedge v) \hat{n} = -\hat{n} v \hat{n}. \quad (12.77)$$

Par conséquent, on en conclut que la réflexion d'un vecteur v par rapport à un plan orthogonal au vecteur unité \hat{n} est un automorphisme $F_{\hat{n}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini comme,

$$F_{\hat{n}}(v) = -\hat{n} v \hat{n}. \quad (12.78)$$

12.8 Rotations

La rotation d'un vecteur \mathbf{v} dans un plan engendré par les vecteurs unités $\hat{\mathbf{n}}_1$ et $\hat{\mathbf{n}}_2$ est obtenu à l'aide de la composition d'une réflexion par rapport au plan orthogonal au vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}_1$ suivie d'une réflexion par rapport au plan orthogonal au vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}_2$. Compte tenu des relations (12.77) et (12.78), la composition de la réflexion $F_{\hat{\mathbf{n}}_1}(\mathbf{v})$ d'un vecteur \mathbf{v} par rapport au plan orthogonal au vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}_1$ qui donne le vecteur \mathbf{v}' et d'une réflexion $F_{\hat{\mathbf{n}}_2}(\mathbf{v}')$ par rapport au plan orthogonal au vecteur unité $\hat{\mathbf{n}}_2$ donne le vecteur \mathbf{v}'' (Fig : 12.6),

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'' &= F_{\hat{\mathbf{n}}_2} \circ F_{\hat{\mathbf{n}}_1}(\mathbf{v}) = F_{\hat{\mathbf{n}}_2}(F_{\hat{\mathbf{n}}_1}(\mathbf{v})) = F_{\hat{\mathbf{n}}_2}(\mathbf{v}') \\ &= -F_{\hat{\mathbf{n}}_2}(\hat{\mathbf{n}}_1 \mathbf{v} \hat{\mathbf{n}}_1) = \hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_1 \mathbf{v} \hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2. \end{aligned} \quad (12.79)$$

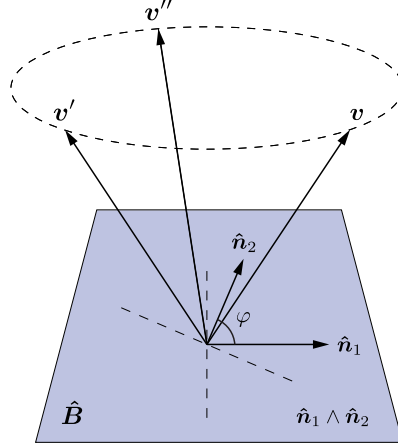


FIGURE 12.6 Le vecteur \mathbf{v}' est a réflexion du vecteur \mathbf{v} par rapport au plan orthogonal au vecteur $\hat{\mathbf{n}}_1$ et le vecteur \mathbf{v}'' est la réflexion du vecteur \mathbf{v}' par rapport au plan orthogonal au vecteur $\hat{\mathbf{n}}_2$. Le vecteur \mathbf{v}'' est la rotation du vecteur \mathbf{v} dans le sens du bivecteur $\hat{\mathbf{n}}_1 \wedge \hat{\mathbf{n}}_2$ ou du bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$.

L'entité géométrique essentielle pour la description des rotations est le multivecteur rotor R et son renversement R^\dagger définis comme,

$$R = \hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_1 \quad \text{and} \quad R^\dagger = (\hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_1)^\dagger = \hat{\mathbf{n}}_1^\dagger \hat{\mathbf{n}}_2^\dagger = \hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2. \quad (12.80)$$

Ainsi, la rotation (12.79) du vecteur \mathbf{v} qui donne le vecteur \mathbf{v}'' est écrit en termes du rotor R et de son renversement R^\dagger comme,

$$\mathbf{v}'' = R \mathbf{v} R^\dagger. \quad (12.81)$$

Le rotor R et son renversement R^\dagger satisfont la relation d'orthogonalité,

$$R R^\dagger = \hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2 = 1. \quad (12.82)$$

Ainsi, le rotor est un multivecteur de module unité,

$$|R|^2 = R R^\dagger = 1. \quad (12.83)$$

Le produit intérieur et le produit extérieur des vecteurs $\hat{\mathbf{n}}_2$ et $\hat{\mathbf{n}}_1$ sont écrits en termes de l'angle φ entre les vecteurs $\hat{\mathbf{n}}_1$ et $\hat{\mathbf{n}}_2$,

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos \varphi \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{n}}_2 \wedge \hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_1 \wedge \hat{\mathbf{n}}_2 = -\sin \varphi \hat{\mathbf{B}}, \quad (12.84)$$

où $\hat{\mathbf{B}}$ le bivecteur unité dans le plan de rotation est orienté dans le sens de rotation du vecteur $\hat{\mathbf{n}}_1$ vers le vecteur $\hat{\mathbf{n}}_2$ (Fig : 12.6). Compte tenu de ces produits (12.84), le rotor et son renversement (12.80) sont remis en forme comme,

$$\begin{aligned} R &= \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \wedge \hat{\mathbf{n}}_1 = \cos \varphi - \sin \varphi \hat{\mathbf{B}}, \\ R^\dagger &= \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 + \hat{\mathbf{n}}_1 \wedge \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos \varphi + \sin \varphi \hat{\mathbf{B}}, \end{aligned} \quad (12.85)$$

ce qui montre que le rotor et son renversement sont des multivecteurs de module unité : ce sont des combinaisons linéaire d'un scalaire et d'un bivecteur. De plus, le bivecteur unité \hat{B} satisfait l'identité,

$$\hat{B}^2 = \hat{B} \hat{B} = -\hat{B} \hat{B}^\dagger = -|\hat{B}|^2 = -1, \quad (12.86)$$

ce qui signifie que le bivecteur unité \hat{B} dans le plan de rotation est isomorphe au nombre imaginaire i dans le plan complexe \mathbb{C} . Compte tenu de l'identité (12.86), le phaseur dans le plan de rotation s'écrit,

$$\begin{aligned} e^{\pm \hat{B}\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k \hat{B}^k \varphi^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{B}^{2k} \varphi^{2k}}{(2k)!} \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{B}^{2k+1} \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{B}. \end{aligned} \quad (12.87)$$

Ainsi, le phaseur dans le plan de rotation donne la formule d'Euler où le nombre imaginaire i est remplacé par le bivecteur unité \hat{B} ,

$$e^{\pm \hat{B}\varphi} = \cos \varphi \pm \sin \varphi \hat{B}. \quad (12.88)$$

Compte tenu de la formule d'Euler (12.88), le rotor et son renversement (12.85) sont remis en forme comme,

$$R = e^{-\hat{B}\varphi} \quad \text{et} \quad R^\dagger = e^{\hat{B}\varphi}, \quad (12.89)$$

et la rotation (12.81) devient,

$$\mathbf{v}'' = e^{-\hat{B}\varphi} \mathbf{v} e^{\hat{B}\varphi}, \quad (12.90)$$

A présent, on désire exprimer la formule (12.90) décrivant la rotation du vecteur \mathbf{v} en termes de l'angle θ entre les vecteurs \mathbf{v}_\parallel et \mathbf{v}'' qui sont les projections orthogonales des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{v}'' sur le plan de rotation. A l'aide du produit géométrique d'un bivecteur et d'un vecteur (12.13) et du carré du module d'un bivecteur (12.86), le vecteur \mathbf{v} peut être décomposée en une partie parallèle est une partie orthogonale au plan défini par le bivecteur unitaire \hat{B} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= |\hat{B}|^2 \mathbf{v} = \hat{B}^\dagger \cdot \hat{B} \mathbf{v} = -\hat{B} \cdot \hat{B} \mathbf{v} = -\hat{B} \cdot (\hat{B} \cdot \mathbf{v} + \hat{B} \wedge \mathbf{v}) \\ &= \hat{B}^{-1} \cdot (\hat{B} \cdot \mathbf{v} + \hat{B} \wedge \mathbf{v}) = \hat{B}^{-1} (\hat{B} \cdot \mathbf{v}) + \hat{B}^{-1} (\hat{B} \wedge \mathbf{v}) \\ &= P_{\hat{B}}(\mathbf{v}) + \bar{P}_{\hat{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp. \end{aligned} \quad (12.91)$$

Ainsi, la projection et la rejection du vecteur \mathbf{v} sur le plan de rotation de bivecteur unité

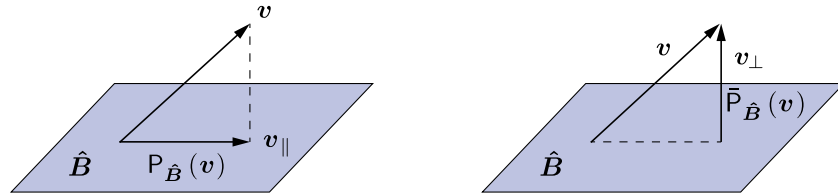


FIGURE 12.7 Projection $P_{\hat{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\parallel$ et rejection $\bar{P}_{\hat{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\perp$ du vecteur \mathbf{v} sur le plan orienté défini par le bivecteur unité \hat{B} .

\hat{B} s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\parallel &= P_{\hat{B}}(\mathbf{v}) = \hat{B}^{-1} (\hat{B} \cdot \mathbf{v}), \\ \mathbf{v}_\perp &= \bar{P}_{\hat{B}}(\mathbf{v}) = \hat{B}^{-1} (\hat{B} \wedge \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (12.92)$$

De manière similaire, la projection et la rejection du vecteur \mathbf{v}'' sur le plan de rotation de



Leonhard Euler

bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$ s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}''_{\parallel} &= P_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}'') = \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}'') , \\ \mathbf{v}''_{\perp} &= \bar{P}_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}'') = \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\hat{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{v}'') . \end{aligned} \quad (12.93)$$

Compte tenu du développement en série de puissance du phaseur (12.87), le rotor R et de son renversement R^{\dagger} sont invariants par projection sur le plan engendré par le bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$,

$$P_{\hat{\mathbf{B}}}(R) = R \quad \text{et} \quad P_{\hat{\mathbf{B}}}(R^{\dagger}) = R^{\dagger} . \quad (12.94)$$

Compte tenu des projections (12.94) du rotor R et de son renversement R^{\dagger} , la projection de la rotation (12.81) du vecteur \mathbf{v} sur le plan défini par le bivecteur $\hat{\mathbf{B}}$ s'écrit,

$$P_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}'') = P_{\hat{\mathbf{B}}}(R \mathbf{v} R^{\dagger}) = P_{\hat{\mathbf{B}}}(R) P_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}) P_{\hat{\mathbf{B}}}(R^{\dagger}) = R P_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}) R^{\dagger} . \quad (12.95)$$

De plus, à l'aide des projections (12.92) et (12.93) des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{v}'' , la rotation (12.95) devient (Fig. 12.8),

$$\mathbf{v}''_{\parallel} = R \mathbf{v}_{\parallel} R^{\dagger} = e^{-\hat{\mathbf{B}}\varphi} \mathbf{v}_{\parallel} e^{\hat{\mathbf{B}}\varphi} . \quad (12.96)$$

On choisit comme base orthonormée du plan de rotation deux vecteurs $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$. Le vecteur

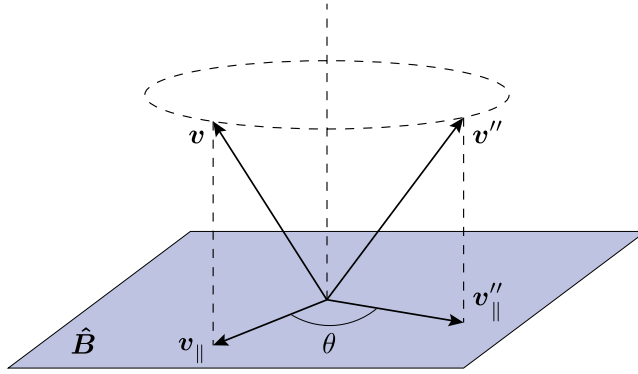


FIGURE 12.8 Rotation du vecteur \mathbf{v}_{\parallel} d'un angle θ dans le plan défini par le bivecteur $\hat{\mathbf{B}}$ dont l'image est le vecteur \mathbf{v}''_{\parallel} .

\mathbf{v}_{\parallel} et le bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$ s'exprime dans cette base comme,

$$\mathbf{v}_{\parallel} = v_{\parallel 1} \hat{\mathbf{e}}_1 + v_{\parallel 2} \hat{\mathbf{e}}_2 \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{B}} = B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 . \quad (12.97)$$

Vu que le vecteur \mathbf{v}_{\parallel} se trouve dans le plan de rotation engendré par le bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$, leur produit extérieur est nul,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel} \wedge \hat{\mathbf{B}} &= v_{\parallel 1} B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 + v_{\parallel 2} B_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 = 0 , \\ \hat{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{v}_{\parallel} &= B_{12} v_{\parallel 1} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1 + B_{12} v_{\parallel 2} \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 = 0 . \end{aligned} \quad (12.98)$$

Par conséquent, compte tenu des identités (12.22) et (12.98), on en conclut que \mathbf{v}_{\parallel} et $\hat{\mathbf{B}}$ anticommulent,

$$\mathbf{v}_{\parallel} \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}_{\parallel} = -\hat{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{\parallel} , \quad (12.99)$$

ce qui implique que,

$$e^{-\hat{\mathbf{B}}\varphi} \mathbf{v}_{\parallel} = (\cos \varphi - \sin \varphi \hat{\mathbf{B}}) \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v}_{\parallel} (\cos \varphi + \sin \varphi \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{v}_{\parallel} e^{\hat{\mathbf{B}}\varphi} . \quad (12.100)$$

A l'aide de la relation d'anticommuation (12.100), la rotation du vecteur \mathbf{v}_{\parallel} dans le plan de rotation (12.90) de bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$ devient,

$$\mathbf{v}''_{\parallel} = \mathbf{v}_{\parallel} e^{2\hat{\mathbf{B}}\varphi} , \quad (12.101)$$

ce qui signifie que le vecteur \mathbf{v}_{\parallel} et le rotor $e^{2\hat{\mathbf{B}}\varphi}$ commutent parce qu'ils se trouvent dans le même plan de rotation. Le produit géométrique des vecteurs \mathbf{v}_{\parallel} et \mathbf{v}_{\parallel}'' s'écrit,

$$\mathbf{v}_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel}'' = \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}'' + \mathbf{v}_{\parallel} \wedge \mathbf{v}_{\parallel}'' . \quad (12.102)$$

Le produit intérieur et le produit extérieur des vecteurs \mathbf{v}_{\parallel} et \mathbf{v}_{\parallel}'' peuvent être exprimés en termes de l'angle θ entre les vecteurs dans le plan de rotation,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}'' &= |\mathbf{v}_{\parallel}| |\mathbf{v}_{\parallel}''| \cos \theta , \\ \mathbf{v}_{\parallel} \wedge \mathbf{v}_{\parallel}'' &= |\mathbf{v}_{\parallel}| |\mathbf{v}_{\parallel}''| \sin \theta \hat{\mathbf{B}} . \end{aligned} \quad (12.103)$$

Compte tenu de ces produits (12.103) et de la formule d'Euler pour l'angle θ , le produit géométrique (12.102) devient,

$$\mathbf{v}_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel}'' = |\mathbf{v}_{\parallel}| |\mathbf{v}_{\parallel}''| \left(\cos \theta + \sin \theta \hat{\mathbf{B}} \right) = |\mathbf{v}_{\parallel}| |\mathbf{v}_{\parallel}''| e^{\hat{\mathbf{B}}\theta} . \quad (12.104)$$

Etant donné que le vecteur \mathbf{v}_{\parallel}'' est obtenu par rotation du vecteur \mathbf{v}_{\parallel} dans le plan de rotation, leurs modules sont égaux,

$$|\mathbf{v}_{\parallel}''| = |\mathbf{v}_{\parallel}| . \quad (12.105)$$

Compte tenu de l'identité (12.105), la multiplication de la relation (12.104) à gauche par le vecteur \mathbf{v}_{\parallel} donne le résultat suivant,

$$\mathbf{v}_{\parallel}^2 \mathbf{v}_{\parallel}'' = |\mathbf{v}_{\parallel}|^2 \mathbf{v}_{\parallel}'' = |\mathbf{v}_{\parallel}|^2 \mathbf{v}_{\parallel} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta} , \quad (12.106)$$

ce qui implique que,

$$\mathbf{v}_{\parallel}'' = \mathbf{v}_{\parallel} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta} . \quad (12.107)$$

Par comparaison des rotations (12.101) et (12.107), on en conclut que l'angle θ entre les vecteurs \mathbf{v}_{\parallel} et \mathbf{v}_{\parallel}'' est le double de l'angle φ ,

$$\theta = 2\varphi . \quad (12.108)$$

En substituant ce résultat dans la relation (12.90) décrivant la rotation du vecteur \mathbf{v} , on en déduit que,

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{B}}\theta}(\mathbf{v}) = e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{v} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} . \quad (12.109)$$

On note que le rotor et son renversement sont exprimés en termes de l'angle θ comme,

$$R = e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \quad \text{et} \quad R^\dagger = e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} . \quad (12.110)$$

Un bivecteur \mathbf{A} peut être exprimé comme le produit extérieur de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} orthogonaux, c'est-à-dire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v} , \\ \mathbf{A}'' &= \mathbf{u}'' \wedge \mathbf{v}'' = \mathbf{u}'' \mathbf{v}'' , \end{aligned} \quad (12.111)$$

où $\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}'' = 0$ et la rotation de chaque vecteur (12.109) s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' &= e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{u} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} , \\ \mathbf{v}'' &= e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{v} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} . \end{aligned} \quad (12.112)$$

Compte tenu des bivecteurs (12.111) et des rotations (12.112), on en conclut que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' \mathbf{v}'' &= e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{u} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{v} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \\ &= e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{u} \mathbf{v} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} , \end{aligned} \quad (12.113)$$

ce qui implique que le bivecteur \mathbf{A}'' obtenu par rotation d'un angle θ du bivecteur \mathbf{A} dans le plan orienté défini par le bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$ s'écrit,

$$\mathbf{A}'' = e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{A} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2} . \quad (12.114)$$

12.9 Repère en rotation

On considère un repère orthonormé mobile $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ qui se déplace par rapport à un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Une translation n'affecte pas un vecteur. En revanche, une rotation d'un repère mobile change les vecteurs de base d'un repère. Ainsi, on considère une rotation d'un angle θ dans un plan dans le sens défini par le bivecteur unité constant \hat{B} (Fig. 12.9). Compte tenu des rotations (12.109) et (12.110), le vecteur unité \hat{e}'_i est exprimé

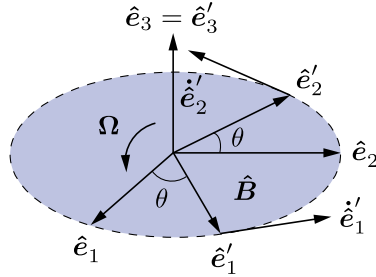


FIGURE 12.9 Repère orthonormé mobile $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ en rotation à vitesse angulaire Ω par rapport à un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ dans le plan orienté décrit par le bivecteur $\hat{B} = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$.

en termes du vecteur unité \hat{e}_i où $i = 1, 2, 3$, comme suit,

$$\hat{e}'_i = R \hat{e}_i R^\dagger. \quad (12.115)$$

La dérivée temporelle des vecteurs de base du repère mobile (12.115) s'écrit,

$$\dot{\hat{e}}'_i = \dot{R} \hat{e}_i R^\dagger + R \hat{e}_i \dot{R}^\dagger \quad (12.116)$$

A l'aide de la relation (12.115), les dérivées temporelles (12.116) deviennent,

$$\dot{\hat{e}}'_i = \dot{R} R^\dagger \hat{e}'_i + \hat{e}'_i R \dot{R}^\dagger \quad (12.117)$$

La dérivée temporelle de la condition de orthogonalité du rotor (12.83) s'écrit,

$$\dot{R} R^\dagger + R \dot{R}^\dagger = 0. \quad (12.118)$$

A l'aide de la relation (12.118), les dérivées temporelles des vecteurs de base du repère mobile (12.116) deviennent,

$$\dot{\hat{e}}'_i = \dot{R} R^\dagger \hat{e}'_i - \hat{e}'_i \dot{R} R^\dagger. \quad (12.119)$$

Compte tenu de la définition d'un rotor et de son renversement (12.110), on obtient les identités suivantes,

$$\begin{aligned} \dot{R} R^\dagger &= -\frac{\dot{\theta}}{2} \hat{B} e^{-\hat{B}\theta/2} e^{\hat{B}\theta/2} = -\frac{\dot{\theta}}{2} \hat{B}, \\ R \dot{R}^\dagger &= e^{-\hat{B}\theta/2} e^{\hat{B}\theta/2} \frac{\dot{\theta}}{2} \hat{B} = \frac{\dot{\theta}}{2} \hat{B}. \end{aligned} \quad (12.120)$$

La vitesse angulaire est un bivecteur défini comme,

$$\Omega = \dot{\theta} \hat{B}, \quad (12.121)$$

ce qui implique que,

$$\dot{R} R^\dagger = -\frac{1}{2} \Omega \quad \text{et} \quad R \dot{R}^\dagger = \frac{1}{2} \Omega, \quad (12.122)$$

qui peut être remis en forme comme,

$$\dot{R} = -\frac{1}{2} \Omega R \quad \text{et} \quad \dot{R}^\dagger = \frac{1}{2} R^\dagger \Omega. \quad (12.123)$$

L'évolution temporelle du repère est alors entièrement déterminée par le rotor $R(t)$ et son renversement $R^\dagger(t)$. En choisissant un angle initial nul, le rotor initial et son renversement valent l'unité,

$$\theta(0) = 0 \quad \text{alors} \quad R(0) = R^\dagger(0) = 1. \quad (12.124)$$

Par conséquent, l'évolution temporelle du rotor et de son renversement s'écrivent,

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(t') dt'\right) = \exp\left(-\hat{\mathbf{B}} \frac{\theta(t)}{2}\right), \\ R^\dagger(t) &= \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(t') dt'\right) = \exp\left(\hat{\mathbf{B}} \frac{\theta(t)}{2}\right), \end{aligned} \quad (12.125)$$

comme il se doit. Au vu du renversement (12.31) du bivecteur $\boldsymbol{\Omega}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\Omega}^\dagger = -\boldsymbol{\Omega}$, le renversement de la relation (12.123) s'écrit,

$$\dot{R}^\dagger = \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} R\right)^\dagger = -\frac{1}{2} R^\dagger \boldsymbol{\Omega}^\dagger = \frac{1}{2} R^\dagger \boldsymbol{\Omega}. \quad (12.126)$$

Compte tenu de la relation (12.122), les dérivées temporelles des vecteurs de base du repère mobile (12.116) s'expriment en termes de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ comme,

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \frac{1}{2} (\mathbf{e}'_i \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}'_i). \quad (12.127)$$

Au vu de l'antisymétrie du produit intérieur (12.22) entre le vecteur \mathbf{e}'_i et le bivecteur $\boldsymbol{\Omega}$, les dérivées temporelles des vecteurs de base du repère mobile (12.119) se réduisent à,

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (12.128)$$

qui est l'équivalent de la formule de Poisson dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 . Afin de retrouver la formule de Poisson dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on définit le pseudovecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ comme le dual du bivecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\omega} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}^* = -\boldsymbol{\Omega}. \quad (12.129)$$

où $(\boldsymbol{\Omega}^*)^* = -\boldsymbol{\Omega}$. Le pseudovecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est orthogonal au bivecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (12.130)$$

On note que la dualité préserve le module d'un multivecteur. Ainsi, la surface du bivecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est égale à la longueur du pseudovecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$,

$$|\boldsymbol{\Omega}| = |\boldsymbol{\omega}|. \quad (12.131)$$

L'illustration graphique de la dualité $\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\omega}$ est la suivante : si la paume de la main droite est orientée dans le sens du bivecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ dans le plan de rotation, alors le pouce de la main droite est orienté le long du pseudovecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 12.10). De manière similaire, l'illustration graphique de la dualité $\boldsymbol{\omega}^* = -\boldsymbol{\Omega}$ est la suivante : si la paume de la main gauche est orienté le long du pseudovecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, alors la paume de la main gauche est orientée dans le sens opposé au bivecteur vitesse angulaire $-\boldsymbol{\Omega}$ (Fig. 12.10). A l'aide des identités (12.52), (12.63) and (12.129), le membre de droite de la formule de Poisson dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 (12.128) est remis en forme comme,

$$\mathbf{e}'_i \cdot \boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{e}'_i \cdot \boldsymbol{\omega}^* = -(\mathbf{e}'_i \wedge \boldsymbol{\omega})^* = -\mathbf{e}'_i \times \boldsymbol{\omega}. \quad (12.132)$$

Compte tenu de l'identité (12.132), et de l'antisymétrie du produit vectoriel,

$$-\mathbf{e}'_i \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i, \quad (12.133)$$

on retrouve la formule de Poisson (12.128) dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 ,

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i. \quad (12.134)$$

comme il se doit. Il est à noter que la formule de Poisson dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 (12.128) est d'une certaine façon plus naturelle que la formule de Poisson dans l'espace



Siméon Denis Poisson

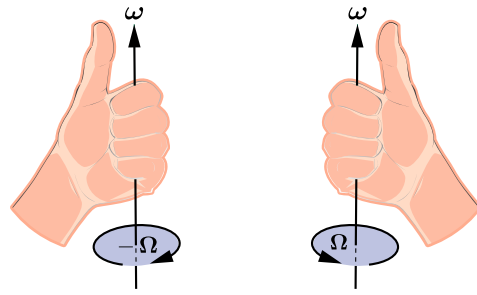


FIGURE 12.10 La dualité $\Omega^* = \omega$ est illustrée par la règle de la main droite et la dualité $\omega^* = -\Omega$ est illustrée par la règle de la main gauche.

vectorel \mathbb{R}^3 (12.134). Dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , les entités géométriques sont contenues entièrement dans le plan de rotation alors que dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 le pseudoscalaire vitesse angulaire ω est orthogonal à ce plan. Dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , le bivecteur vitesse angulaire Ω génère la rotation du vecteur de base \hat{e}_i d'un angle $\pi/2$ dans le sens de rotation, défini par le bivecteur unité \hat{B} , pour l'amener sur le vecteur image \hat{e}'_i . Ceci est l'interprétation géométrique du produit intérieur $\hat{e}'_i \cdot \Omega$.

13.1 Introduction

Les formes différentielles introduites par Cartan sont basées sur l'algèbre extérieure de Grassmann. Elles permettent d'unifier les théorèmes d'analyse vectorielle : le théorème du gradient, le théorème de la divergence et le théorème du rotationnel. L'analyse géométrique ("geometric calculus" en anglais), qui est basée sur l'algèbre géométrique ou l'algèbre de Clifford, est une extension de l'algèbre extérieure qui permet également d'unifier ces théorèmes comme on va le montrer dans ce chapitre.

Dans la sect. 13.2, on montre que les gradients d'un vecteur, d'un bivecteur ou plus généralement d'un multivecteur sont la somme de la divergence et du rotationnel. Afin de pouvoir exprimer l'équation de Maxwell sous forme locale en analyse géométrique, on établit des identités différentielles duales en sect. 13.3. Les théorèmes du gradient du rotationnel et de la divergence sont exprimés en analyse géométrique en sect. 13.4, 13.5 et 13.6. En sommant les théorèmes de la divergence et du rotationnel on obtient le théorème fondamental de l'intégration en analyse géométrique pour une hypersurface régulière M appelée une variété en sect. 13.7. Par conséquent, l'analyse géométrique unifie les théorèmes de l'analyse vectorielle.

Le pseudoscalaire de algèbre géométrique du plan \mathbb{G}^2 , qui est un bivecteur unité, est isomorphe à un nombre imaginaire. Ainsi, l'algèbre géométrique restreinte à un plan \mathbb{G}^2 est isomorphe au corps des nombres complexes \mathbb{C} . Dans la sect. 13.8, on démontre alors que le théorème fondamental de l'analyse géométrique contient le théorème de Cauchy de l'analyse complexe. En d'autres termes, l'analyse géométrique unifie l'analyse vectorielle et l'analyse complexe. Il faut avouer que c'est tout de même bluffant !

En analyse géométrique, les quatre équations vectorielles de Maxwell peuvent être reformulées en termes du multivecteur champ électromagnétique $F = e + cB$, qui est la somme du vecteur champ e et du bivecteur champ magnétique B multiplié par la vitesse de propagation de la lumière dans le vide c . Le pseudovecteur champ magnétique b est le dual du bivecteur champ magnétique B , c'est-à-dire $b = B^*$. Les quatre équations vectorielles de Maxwell se réduisent en analyse géométrique à une seule équation d'évolution pour le multivecteur champ magnétique F comme montré en sect. 13.9. En faisant agir la différence entre l'opérateur gradient ∇ et l'opérateur dérivée par rapport au temps $c^{-1}\partial_t$ sur l'équation de Maxwell, on obtient l'équation d'onde électromagnétique en présence de charges et de courants électriques comme illustré en sect. 13.9. La densité de force de Lorentz est aussi exprimée en algèbre géométrique dans cette section.

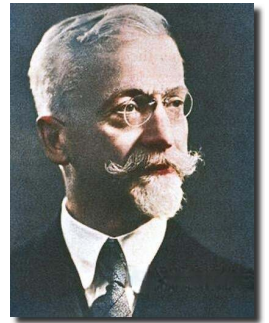
L'équation de Maxwell, l'équation d'onde électromagnétique et l'équation de continuité électromagnétique prennent une forme encore plus simple dans l'algèbre géométrique de l'espace-temps $\mathbb{G}^{1,3}$,

$$\nabla G = \frac{1}{c} J \quad \text{et} \quad \square G = \frac{1}{c} \nabla \wedge J \quad \text{et} \quad \nabla \cdot J = 0, \quad (13.1)$$

où $G = \varepsilon_0 F$ est le quadribivecteur champ électromagnétique, $J = c\rho - \mathbf{j}$ est le quadrivecteur densité de courant électrique et $\square = \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$ est l'opérateur d'Alembertien. Ces équations sont un "teaser", leur dérivation fait l'objet d'un exercice intéressant...



Hermann Grassmann



Elie Cartan

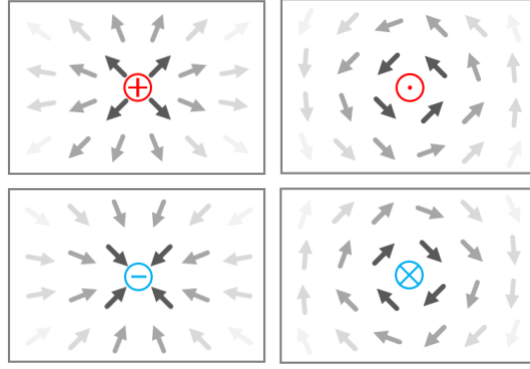


FIGURE 13.1 Divergence du vecteur champ électrique $\nabla \cdot \mathbf{e}$ généré par des charges électrique q positive et négative. Rotationnel du pseudovecteur champ magnétique $\nabla \wedge \mathbf{b}$ généré par des courants électriques I sortant et entrant.

13.2 Opérateurs différentiels

Le produit géométrique d'un vecteur \mathbf{u} et d'un vecteur \mathbf{v} est la somme algébrique de leur produit intérieur et de leur produit extérieur,

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \quad (13.2)$$

En remplaçant le vecteur \mathbf{u} par l'opérateur gradient ∇ dans le produit géométrique (13.2), c'est-à-dire $\mathbf{u} = \nabla$, le gradient d'un vecteur \mathbf{v} est alors la somme algébrique de la divergence et du rotationnel de ce vecteur (Fig. 13.1),

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \wedge \mathbf{v}. \quad (13.3)$$

En remplaçant le vecteur \mathbf{v} par le bivecteur \mathbf{B} dans l'identité (13.3), le gradient d'un bivecteur \mathbf{B} est alors la somme algébrique de la divergence et du rotationnel de ce bivecteur,

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{B}. \quad (13.4)$$

Par généralisation, le gradient peut être défini pour multivecteur. Le gradient ∇ et d'un multivecteur M est la somme algébrique de la divergence et du rotationnel de ce multivecteur,

$$\nabla M = \nabla \cdot M + \nabla \wedge M. \quad (13.5)$$

13.3 Identités différentielles duales

La dualité entre le produit vectoriel et le produit extérieur de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} s'écrit,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \quad (13.6)$$

En remplaçant le vecteur \mathbf{u} par l'opérateur gradient ∇ dans la relation duale (13.6), c'est-à-dire $\mathbf{u} = \nabla$, le pseudovecteur rotationnel est le dual du bivecteur rotationnel (Fig. 13.2),

$$(\nabla \wedge \mathbf{v})^* = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (13.7)$$

Les identités duales pour deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} s'écrivent,

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^* \quad \text{et} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^*. \quad (13.8)$$

En remplaçant le vecteur \mathbf{u} par l'opérateur gradient ∇ dans l'identité duale (13.8), on établit la dualité entre la divergence et le rotationnel du vecteur \mathbf{v} ,

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})^* = \nabla \wedge \mathbf{v}^* \quad \text{et} \quad (\nabla \wedge \mathbf{v})^* = \nabla \cdot \mathbf{v}^*. \quad (13.9)$$

Les identités duales pour un vecteur \mathbf{u} et un bivecteur \mathbf{B} s'écrivent,

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})^* = \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}^* \quad \text{et} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})^* = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}^*. \quad (13.10)$$

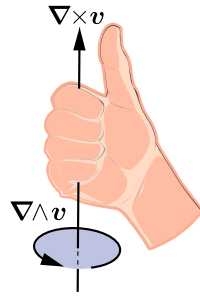


FIGURE 13.2 Le pseudovecteur rotationnel $\nabla \times \mathbf{v}$ est le dual du bivecteur rotationnel $\nabla \wedge \mathbf{v}$ avec une orientation donnée par la règle de la main droite.

En remplaçant le vecteur \mathbf{u} par l'opérateur gradient ∇ dans l'identité duale (13.10), on établit la dualité entre la divergence et le rotationnel du bivecteur \mathbf{B} ,

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})^* = \nabla \wedge \mathbf{B}^* \quad \text{et} \quad (\nabla \wedge \mathbf{B})^* = \nabla \cdot \mathbf{B}^*. \quad (13.11)$$

Compte tenu de la dualité entre le vecteur et le bivecteur rotationnel (13.7) et de la deuxième identité duale (13.11) pour le bivecteur rotationnel $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{v}$, on établit les identités hybrides,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v})^* = (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{v})^* = 0, \quad (13.12)$$

et

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \wedge \mathbf{v})^* = \nabla \cdot ((\nabla \wedge \mathbf{v})^*)^* = -\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v}). \quad (13.13)$$

13.4 Théorème du gradient

L'intégrale de Riemann pour la dérivée d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est définie comme,

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \quad (13.14)$$

L'intégrale (13.14) peut être généralisée le long d'une courbe C de vecteur tangent infinitésimal $d\mathbf{s}$ (Fig. 13.3),

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_C d\mathbf{s} \cdot \frac{df}{dx} = \int_C d\mathbf{s} \cdot \nabla f = \int_C d^1\mathbf{x} \cdot \nabla f, \quad (13.15)$$

à l'aide de la notation,

$$d\mathbf{s} = d^1\mathbf{x} \quad \text{et} \quad df = f d^0\mathbf{x}. \quad (13.16)$$

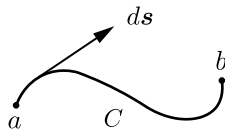


FIGURE 13.3 Courbe C d'extrémités a et b et de vecteur tangent infinitésimal $d\mathbf{s} = d^1\mathbf{x}$.

L'intégrale (13.15) peut aussi être écrite de la manière suivante,

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_a^b dx \frac{df}{dx} = \int_{f(a)}^{f(b)} df = \int_{\partial C} d^0\mathbf{x} f, \quad (13.17)$$

où ∂C est le bord de la courbe C soit ses deux extrémités a et b . En identifiant les membres

de droite des intégrales de Riemann (13.15) et (13.17) le long d'une courbe C , on obtient le théorème du gradient le long d'une courbe,

$$\int_C d^1 \mathbf{x} \cdot \nabla f = \int_{\partial C} d^0 \mathbf{x} f. \quad (13.18)$$

13.5 Théorèmes du rotationnel

Le théorème du rotationnel, aussi appelé le théorème de Stokes, pour un champ vectoriel \mathbf{f} sur une surface S de bord $\partial S = C$ est défini comme,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \quad (13.19)$$

où le pseudovecteur surface infinitésimale $d\boldsymbol{\sigma}$ est le dual du bivecteur surface infinitésimale $d\mathbf{S}^*$ (Fig. 13.4),

$$d\boldsymbol{\sigma}^* = d\mathbf{S} \quad \text{ainsi} \quad d\boldsymbol{\sigma} = -d\mathbf{S}^*. \quad (13.20)$$



Sir George Gabriel
Stokes

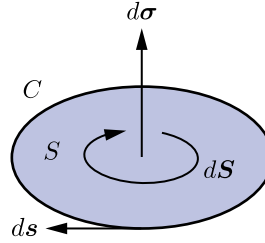


FIGURE 13.4 Surface S de bord $\partial S = C$ et de pseudovecteur surface infinitésimale $d\boldsymbol{\sigma}$ qui est le dual du bivecteur surface infinitésimale $d\mathbf{S}$.

Compte tenu de la dualité (13.7) entre le pseudovecteur et le bivecteur rotationnel d'un vecteur, des identités duales (13.10) et de la commutativité du produit extérieur entre un vecteur et un bivecteur, le membre de gauche du théorème du rotationnel (13.19) devient,

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= - \iint_S (\nabla \wedge \mathbf{f})^* \cdot d\mathbf{S}^* = - \iint_S ((\nabla \wedge \mathbf{f})^* \wedge d\mathbf{S})^* \\ &= - \iint_S (d\mathbf{S} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f})^*)^* = - \iint_S d\mathbf{S} \cdot ((\nabla \wedge \mathbf{f})^*)^* = \iint_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}), \end{aligned} \quad (13.21)$$

Le membre de droite du théorème du rotationnel (13.19) devient,

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}, \quad (13.22)$$

à l'aide de la notation,

$$d\mathbf{S} = d^2 \mathbf{x} \quad \text{et} \quad d\mathbf{s} = d^1 \mathbf{x}. \quad (13.23)$$

Par conséquent, le théorème du rotationnel (13.19) est remis en forme comme,

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}. \quad (13.24)$$

Le produit extérieur du vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{x}$ orthogonal à la surface S et de l'intégrand du théorème du rotationnel (13.24) sur le volume V s'écrit,

$$\iiint_V (d\mathbf{x} \wedge d^2 \mathbf{x}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \iint_{\partial V} (d\mathbf{x} \wedge d^1 \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}. \quad (13.25)$$

et à l'aide de la notation,

$$d\mathbf{x} \wedge d^2 \mathbf{x} = d^3 \mathbf{x} \quad \text{et} \quad d\mathbf{x} \wedge d^1 \mathbf{x} = d^2 \mathbf{x}, \quad (13.26)$$

le théorème du rotationnel dans un volume s'écrit,

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}. \quad (13.27)$$

13.6 Théorèmes de la divergence

Le théorème de la divergence, aussi appelé le théorème de Gauss, pour un champ vectoriel \mathbf{f} dans un volume V de bord $\partial V = S$ est défini comme,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dv = \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (13.28)$$

où le trivecteur volume infinitésimal dV est le dual du scalaire volume infinitésimal dv (Fig. 13.5),

$$dV = dv^* \quad \text{ainsi} \quad dv = -dV^*. \quad (13.29)$$



Carl Friedrich Gauss

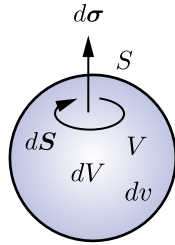


FIGURE 13.5 Volume V de bord $\partial V = S$ et de trivecteur volume infinitésimal dV qui est le dual du scalaire volume infinitésimal dv .

Compte tenu de la dualité (13.29) entre le scalaire et le trivecteur volume infinitésimal, le membre de gauche du théorème de la divergence (13.28) devient,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dv = - \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV^* = - \iiint_V (dV (\nabla \cdot \mathbf{f}))^*. \quad (13.30)$$

Compte tenu de la dualité (13.7) entre le pseudovecteur et le bivecteur surface infinitésimale (13.20), des identités duales (13.10) et de la commutativité du produit extérieur entre un vecteur et un bivecteur, le membre de droite du théorème de la divergence (13.28) devient,

$$\oiint_S \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}^* = - \oiint_S (\mathbf{f} \wedge d\mathbf{S})^* = - \oiint_S (d\mathbf{S} \wedge \mathbf{f})^*. \quad (13.31)$$

Par conséquent, le dual du théorème divergence (13.28) s'écrit,

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}. \quad (13.32)$$

A l'aide de la notation (13.26), le théorème de la divergence (13.32) devient,

$$\iiint_V d\mathbf{x} \wedge d^2 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \oiint_{\partial V} d\mathbf{x} \wedge d^1 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}, \quad (13.33)$$

compte tenu du fait que le vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{x}$ est orthogonal à la surface S . On en déduit un théorème de la divergence sur la surface S ,

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f} = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}. \quad (13.34)$$

13.7 Théorème fondamental de l'intégration

La somme du théorème du rotationnel (13.24) et du théorème de la divergence (13.34) sur la surface S s'écrit,

$$\iint_S (d^2 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) + d^2 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f}) = \oint_{\partial S} (d^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} + d^1 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}). \quad (13.35)$$

Compte tenu de la définition du gradient d'un vecteur (13.3), la somme du théorème du rotationnel et de la divergence sur la surface S donne le théorème du gradient sur cette surface,

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{f} = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} \mathbf{f}. \quad (13.36)$$

La somme du théorème du rotationnel (13.27) et du théorème de la divergence (13.32) dans le volume V s'écrit,

$$\iiint_V (d^3 \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) + d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{f}) = \oiint_{\partial V} (d^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} + d^2 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}). \quad (13.37)$$

Compte tenu de la définition du gradient d'un vecteur (13.3), la somme du théorème du rotationnel et de la divergence dans le volume V donne le théorème du gradient dans ce volume,

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{f} = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} \mathbf{f}. \quad (13.38)$$

En algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , le théorème du gradient (13.18) le long une courbe C peut être généralisé d'un champ scalaire f à un champ multivectoriel F ,

$$\int_C d^1 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \int_{\partial C} d^0 \mathbf{x} F. \quad (13.39)$$

De manière similaire, le théorème du gradient (13.36) sur une surface S peut être généralisé d'un champ vectoriel \mathbf{f} à un champ multivectoriel F ,

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oint_{\partial S} d^1 \mathbf{x} F. \quad (13.40)$$

De façon analogue, le théorème du gradient (13.38) dans un volume V peut être généralisé d'un champ vectoriel \mathbf{f} à un champ multivectoriel F ,

$$\iiint_V d^3 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oiint_{\partial V} d^2 \mathbf{x} F. \quad (13.41)$$

En analyse géométrique, les trois théorèmes du gradient d'un champ multivectoriel (13.39), (13.40) et (13.41) sont des cas particuliers du théorème du gradient d'un champ multivectoriel sur une hypersurface régulière M , appelée une variété (manifold en anglais). Ce théorème est le théorème fondamental de l'intégration,

$$\int_M d^n \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oint_{\partial M} d^{n-1} \mathbf{x} F. \quad (13.42)$$

13.8 Théorème de Cauchy

Afin de déduire le théorème de Cauchy pour une fonction analytique du théorème fondamental de l'analyse géométrique (13.42), on se place dans l'algèbre géométrique à 2 dimensions \mathbb{G}^2 et on établit l'isomorphisme entre le pseudoscalaire $I = \hat{e}_x \hat{e}_y$ et le nombre imaginaire i ,

$$I^2 = (\hat{e}_x \hat{e}_y)^2 = \hat{e}_x \hat{e}_y \hat{e}_x \hat{e}_y = -\hat{e}_x \hat{e}_x \hat{e}_y \hat{e}_y = -1. \quad (13.43)$$

Dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^2 , l'opérateur gradient s'écrit,

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (13.44)$$

En l'algèbre géométrique \mathbb{G}^2 , l'équivalent d'une fonction complexe est le multivecteur,

$$F(x, y) = u(x, y) + I v(x, y) = u(x, y) + v(x, y) \hat{e}_x \hat{e}_y, \quad (13.45)$$

où $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$. Le gradient du multivecteur $F(x, y)$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \nabla F &= \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + v \hat{e}_x \hat{e}_y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \hat{e}_y. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Une fonction à valeurs complexes est holomorphe si elle satisfait les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (13.47)$$

Par conséquent, en algèbre géométrique \mathbb{G}^2 , le gradient d'une fonction holomorphe est nul,

$$\nabla F = 0. \quad (13.48)$$

Pour une fonction holomorphe F intégrée sur une surface S , le théorème fondamental de l'intégration (13.42) s'écrit,

$$\iint_S d^2 \mathbf{x} \cdot \nabla F = \oint_C d^1 \mathbf{x} F = 0, \quad (13.49)$$

où $\partial S = C$. En multipliant l'intégrand du théorème fondamental par le vecteur constant $\mathbf{u} = \text{cste}$ où la différentielle $d\mathbf{v} = d^1 \mathbf{x}$ s'écrit,

$$\oint_C \mathbf{u} d\mathbf{v} F = \oint_C d(\mathbf{u} \mathbf{v}) F = 0, \quad (13.50)$$

Le produit géométrique des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est un multivecteur Z isomorphe à un nombre complexe,

$$\mathbf{u} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = x + I y = Z. \quad (13.51)$$

Ainsi, le théorème fondamental (13.50) pour une fonction holomorphe $f(Z)$ est le théorème de Cauchy,

$$\oint_C F(Z) dZ = 0. \quad (13.52)$$

En suivant la même démarche qu'en analyse complexe, on peut alors établir le théorème des résidus pour une fonction non holomorphe,

$$\oint_C F(Z) dZ = 2\pi I \sum_{k=1}^n \text{Res}_{Z=Z_k} F(Z). \quad (13.53)$$

Le théorème fondamental de l'analyse géométrique contient donc l'analyse vectorielle et l'analyse complexe : c'est prodigieux !



Augustin Louis
Cauchy

13.9 Equation de Maxwell

Dans cette section, on va montrer que les quatre équations de Maxwell peuvent être écrites comme une seule équation en algèbre géométrique \mathbb{G}^3 . Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , les équations de Gauss électrique et magnétique, l'équation de Faraday et l'équation d'Ampère-Maxwell lient le champ électrique \mathbf{e} , le champ de déplacement électrique \mathbf{d} , le champ magnétique \mathbf{b} et le champ magnétique auxiliaire \mathbf{h} aux densités de charge électrique ρ et de courant électrique \mathbf{j} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho, \quad (13.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (13.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (13.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \partial_t \mathbf{d} + \mathbf{j}. \quad (13.57)$$

Dans le vide, ces champs sont liées par les relations constitutives électrique et magnétique,

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}, \quad (13.58)$$

où la permittivité électrique du vide ε_0 et la perméabilité magnétique du vide μ_0 sont liées à la vitesse de propagation de la lumière dans le vide c de la manière suivante,

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (13.59)$$

Ainsi, dans le vide, les quatre équations de Maxwell deviennent,

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (13.60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (13.61)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (13.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{c^2} \left(\partial_t \mathbf{e} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j} \right). \quad (13.63)$$

Afin de décrire les équations de Maxwell à l'aide d'un seul champ électromagnétique, on définit le champ vectoriel complexe \mathbf{f} de Riemann-Silberstein,

$$\mathbf{f} = \mathbf{e} + i c \mathbf{b}. \quad (13.64)$$

En algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , l'équivalent champ vectoriel complexe de Riemann-Silberstein \mathbf{f} est le multivecteur champ électromagnétique F défini comme,

$$F = \mathbf{e} + I c \mathbf{b}. \quad (13.65)$$

Le pseudovecteur champ magnétique \mathbf{b} est lié au bivecteur champ magnétique \mathbf{B} par la dualité,

$$\mathbf{B} = -\mathbf{b}^* = -\mathbf{b} I^{-1} = \mathbf{b} I = I \mathbf{b} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}^*. \quad (13.66)$$

Par conséquent, le multivecteur champ électromagnétique F devient,

$$F = \mathbf{e} + c \mathbf{B}. \quad (13.67)$$

Afin d'écrire les équations de Maxwell (13.60)-(13.63) en termes du multivecteur champ électromagnétique F , on écrit la divergence et le rotationnel du pseudovecteur champ magnétique \mathbf{b} en termes de la divergence et du rotationnel du bivecteur champ magnétique \mathbf{B} et le rotationnel du vecteur champ électrique \mathbf{e} en termes de son dual à l'aide des identités (13.7), (13.9), (13.11) et (13.66),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{b} &= \nabla \cdot \mathbf{B}^* = (\nabla \wedge \mathbf{B})^*, \\ \nabla \times \mathbf{b} &= (\nabla \wedge \mathbf{b})^* = \nabla \cdot \mathbf{b}^* = -\nabla \cdot \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{e} &= (\nabla \wedge \mathbf{e})^*. \end{aligned} \quad (13.68)$$

A l'aide de la première identité (13.68), l'équation de Gauss magnétique (13.61) devient,

$$(\nabla \wedge \mathbf{B})^* = 0. \quad (13.69)$$

A l'aide de la deuxième identité (13.68), l'équation d'Ampère-Maxwell (13.63) devient,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{e} \right). \quad (13.70)$$

A l'aide de la troisième identité (13.68) et de la dualité (13.66), l'équation de Faraday (13.62) devient,

$$(\nabla \wedge \mathbf{e})^* = -\partial_t \mathbf{B}^*. \quad (13.71)$$

Ainsi, l'équation de Gauss électrique (13.60), l'équation d'Ampère-Maxwell (13.70), le dual de l'équation de Faraday (13.71) et le dual de l'équation de Gauss magnétique (13.69) s'écrivent,

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{dimension 0}, \quad (13.72)$$



Bernhard Riemann



Siméon Denis Poisson



Michael Faraday

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{e} \right) \quad \text{dimension 1,} \quad (13.73)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{B} \quad \text{dimension 2,} \quad (13.74)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0 \quad \text{dimension 3.} \quad (13.75)$$

Compte tenu de l'équation de Gauss électrique (13.72) et de l'équation d'Ampère-Maxwell (13.73), la divergence du multivecteur champ électromagnétique (13.67) s'écrit,

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot \mathbf{e} + c \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c \varepsilon_0} (c\rho - \mathbf{j}) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{e}. \quad (13.76)$$

Compte tenu des duals de l'équation de Faraday (13.74) et de l'équation de Gauss magnétique (13.75), le rotationnel du multivecteur champ électromagnétique (13.67) s'écrit,

$$\nabla \wedge F = \nabla \wedge \mathbf{e} + c \nabla \wedge \mathbf{B} = -\partial_t \mathbf{B}. \quad (13.77)$$

Le gradient du multivecteur champ électromagnétique (13.67) est obtenu en sommant sa divergence (13.76) et son rotationnel (13.77),

$$\nabla F = \nabla \cdot F + \nabla \wedge F = \frac{1}{c \varepsilon_0} (c\rho - \mathbf{j}) - \frac{1}{c} (\partial_t \mathbf{e} + c \partial_t \mathbf{B}). \quad (13.78)$$

La dérivée temporelle du multivecteur champ électromagnétique (13.67) s'écrit,

$$\partial_t F = \partial_t \mathbf{e} + c \partial_t \mathbf{B}. \quad (13.79)$$

Compte tenu du gradient (13.78) et de la dérivée temporelle (13.79) du multivecteur champ électromagnétique, on obtient l'équation de Maxwell dans l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 ,

$$\left(\frac{1}{c} \partial_t + \nabla \right) (\varepsilon_0 F) = \frac{1}{c} (c\rho - \mathbf{j}), \quad (13.80)$$

qui contient la même information que les quatre équations multivectorielles (13.72)-(13.75). C'est d'une simplicité étonnante! Compte tenu de la dualité (13.66) et des relations différentielles duales (13.11) et (13.68), on obtient l'identité,

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{B}) = -\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{b}^*) = -\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b})^* = -(\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{b})^* = 0. \quad (13.81)$$

Compte tenu des équations de Gauss électrique (13.72) et d'Ampère-Maxwell (13.73), la divergence de la divergence du bivecteur champ magnétique \mathbf{B} s'écrit aussi,

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{e} \right) = -\frac{1}{c^2 \varepsilon_0} (\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho). \quad (13.82)$$

En identifiant les membres de droite des relations (13.81) et on obtient l'équation de continuité électromagnétique,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (13.83)$$

13.10 Equation d'onde électromagnétique

En algèbre géométrique \mathbb{G}^3 , l'équation d'onde électromagnétique peut être déduite de l'équation de Maxwell (13.80). En multipliant l'équation de Maxwell par l'opérateur $\nabla - c^{-1} \partial_t$, on obtient l'équation suivante,

$$\left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t \right) \left(\nabla + \frac{1}{c} \partial_t \right) (\varepsilon_0 F) = \left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t \right) \frac{1}{c} (c\rho - \mathbf{j}). \quad (13.84)$$

Compte tenu de l'identité opératoire,

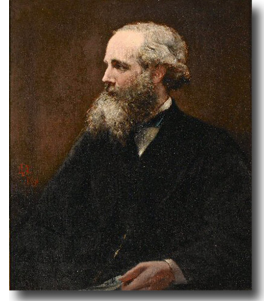
$$\left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t \right) \left(\nabla + \frac{1}{c} \partial_t \right) = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2, \quad (13.85)$$

et de l'identité vectorielle suivante établie à l'aide de l'équation de continuité (13.83),

$$\left(\nabla - \frac{1}{c} \partial_t \right) \frac{1}{c} (c\rho - \mathbf{j}) = \nabla \rho - \frac{1}{c} (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}) - \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{j}$$



André-Marie Ampère



James Clerk Maxwell

$$= \nabla \rho - \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{j}, \quad (13.86)$$

l'équation (13.84) est identifiée comme l'équation d'onde électromagnétique,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) (\varepsilon_0 F) = \nabla \rho - \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{j}. \quad (13.87)$$

A l'aide de l'opérateur d'Alembertien,

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2, \quad (13.88)$$

l'équation d'onde électromagnétique (13.87) est remise en forme comme,

$$\square (\varepsilon_0 F) = \nabla \rho - \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{j}. \quad (13.89)$$

Dans le vide, en absence de charges et de courants électriques,

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad (13.90)$$

l'équation d'onde électromagnétique (13.89) se réduit à,

$$\square (\varepsilon_0 F) = 0. \quad (13.91)$$

En présence charges et de courants électriques, la densité de force de Lorentz exercée par le vecteur champ électrique \mathbf{e} et le pseudovecteur champ magnétique \mathbf{b} sur une densité de charges électriques ρ et une densité de courant électrique \mathbf{j} s'écrit,

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mathbf{b}. \quad (13.92)$$

Compte tenu des identités duales (13.7), (13.8) et (13.66) ainsi que de l'antisymétrie du produit intérieur entre un vecteur et un bivecteur, on en déduit l'identité vectorielle,

$$\mathbf{j} \times \mathbf{b} = (\mathbf{j} \wedge \mathbf{b})^* = \mathbf{j} \cdot \mathbf{b}^* = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{j}. \quad (13.93)$$

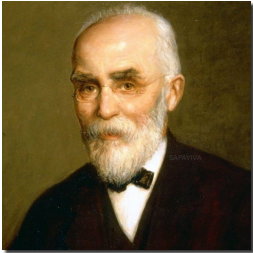
A l'aide de cette identité vectorielle (13.93), la densité de force de Lorentz (13.92) est exprimée en algèbre géométrique \mathbb{G}^3 comme,

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{j}. \quad (13.94)$$

Géométriquement, le deuxième terme de la force de Lorentz (13.94) signifie que la partie magnétique de cette densité de force est orientée dans une direction orthogonale à la densité de courant électrique \mathbf{j} dans le plan défini par le bivecteur champ magnétique \mathbf{B} : c'est clairement plus simple à visualiser qu'avec le pseudovecteur champ magnétique \mathbf{b} !



Jean le Rond
d'Alembert



Hendrik Antoon
Lorentz